第一讲：张量分析基础
损伤力学基础研究生课程

任晓丹

同济大学建筑工程系

March 16, 2016

物格而后知至

知至而后意诚

意诚而后心正

心正而后身修

身修而后家齐

家齐而后国治

国治而后天下平

I admire the elegance of your method of computation; it must be nice to ride through these fields upon the horse of true mathematics while the like of us have to make our way laboriously on foot.

Albert Einstein

概述

- 张量是描述线性关系的一类几何结构，最早可以追溯到高斯在微分几何方面的开创性工作。
- 连续介质力学由于其所研究物理量的几何特性，在其理论构架中也广泛采用了张量表示。
- 张量具有标架不变性，基于张量定义的规律较容易满足客观性原理，同时张量表示能够大大简化表述，并且能否清楚的显示表达式的物理实质。
- 本课程仅从连续介质力学特别是损伤力学的需求出发，简要介绍张量的表示方法和性质，作为学习和研究的基础。

笛卡尔张量

- 鉴于本课程涉及的理论均建立在正交直线坐标系（笛卡儿坐标系）内，这里将讨论限定在这一类坐标系内，所涉及的张量即笛卡儿张量，并不再涉及协变量与逆变量的区分。
- 考虑三维空间中的矢量 $\boldsymbol{u}$，在基矢量 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 定义的笛卡儿坐标系内，$\boldsymbol{u}$ 可表示为如下形式:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \boldsymbol{e}_i$$

张量简明示意

坐标系 (x, y, z) 可以表示为 (x_1, x_2, x_3)，有：

$$x \to x_1 \to 1 \quad y \to x_2 \to 2 \quad z \to x_3 \to 3$$

$$\boldsymbol{u} = [u_x, u_y, u_z]^T = [u_1, u_2, u_3]^T \to u_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

张量简明运算

张量的直接乘积（代数运算）:

$$u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} = w_{ij} \qquad \sigma_{ij}\epsilon_{kl} = \phi_{ijkl}$$

张量对坐标的偏导（分析运算）:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = u_{i,2} = w_{i2} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} = w_{ij}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \sigma_{ij,kl} = \phi_{ijkl}$$

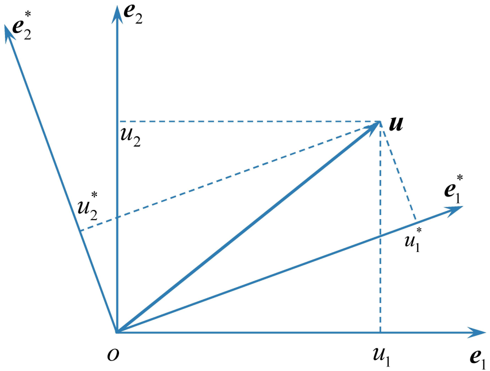
求和约定

爱因斯坦求和约定：在同一项内（单项式、乘积式、求导式等）重复一次且仅重复一次的指标，表示在指标的取值范围内求和。

$$\boldsymbol{u} = \sum_i u_i \boldsymbol{e}_i = u_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\sigma_{ij,j} = \sum_j \sigma_{ij,j} = \sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3}$$

坐标变换



$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{u} = u_i^* \boldsymbol{e}_i^*$$

坐标变换

由于向量（张量）的坐标无关性

$$u_i \boldsymbol{e}_i = u_i^* \boldsymbol{e}_i^* \;\Rightarrow\; u_i \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j^* = u_i^* \boldsymbol{e}_i^* \cdot \boldsymbol{e}_j^*$$

对于正交坐标系，有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i^* \cdot \boldsymbol{e}_j^* = \delta_{ij},\; \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

于是可得如下坐标变换公式

$$u_i^* = u_i \beta_{ij},\; \beta_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j^*$$

坐标变换

可以证明，坐标转换（系数）矩阵具有正交性

$$\beta_{ik}\beta_{jk} = \beta_{ki}\beta_{kj} = \delta_{ij}$$

将向量看作一阶张量，二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的坐标分量满足

$$T^*_{ij} = \beta_{ik}\beta_{jl}T_{kl}$$

n 阶张量 $\boldsymbol{R}$ 满足下述坐标转换方程

$$R^*_{i_1\cdots\cdots i_n} = \beta_{i_1 j_1}\cdots\cdots\beta_{i_n j_n}R_{j_1\cdots\cdots j_n}$$

而上述方程，在很多教科书中当作 n 阶张量的定义。

张量的运算和性质

- 前述讨论中不加说明地给出了张量的两类表示方法：抽象表示方法与指标表示方法。
- 抽象表示更加简洁，而指标表示能够更加清晰地跟踪张量的运算和坐标变换的过程。
- 本课程采用了以张量抽象表示方法为主的表达方式，同时在某些时候也借助于指标形式的优点简化相关的运算和表达式。
- 本小节中介绍的张量运算，则采用以指标形式定义抽象算符的基本思路。

张量的内积

对于两个张量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 单点积，可以定义为

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots i_{n-1} i_n}\beta_{j_1 j_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}\delta_{i_n j_1}=\alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots i_{n-1} k}\beta_{k\, j_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}$$

对于高阶张量，经常用到双点积运算。一般存在两类双点积运算

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{\beta} & =\alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots i_{n-1} i_n}\beta_{j_1 j_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}\delta_{i_{n-1} j_1}\delta_{i_n j_2}\\ & =\alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots k_1 k_2}\beta_{k_1 k_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}\\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\cdot\boldsymbol{\beta} & =\alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots i_{n-1} i_n}\beta_{j_1 j_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}\delta_{i_n j_1}\delta_{i_{n-1} j_2}\\ & =\alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots k_1 k_2}\beta_{k_2 k_1\cdots\cdots j_{m-1} j_m}\end{cases}$$

同理，也可以定义高阶张量的各类高阶点积，张量的高阶点积也可以看作是向量内积的推广。

张量的并乘（张量积）

n 阶张量 $\boldsymbol{P}_{(n)}$ 与 m 阶张量 $\boldsymbol{Q}_{(m)}$ 并乘可得 $m+n$ 阶张量 $\boldsymbol{R}_{(n+m)}$，表示为

$$\boldsymbol{R}_{(n+m)} = \boldsymbol{P}_{(n)} \otimes \boldsymbol{Q}_{(m)}$$

采用指标表示可写为

$$R_{i_1 \cdots\cdots i_n j_1 \cdots\cdots j_m} = P_{i_1 \cdots\cdots i_n} Q_{j_1 \cdots\cdots j_m}$$

例如：

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

指标表示与抽象表示的联系

- 对于矢量

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i$$

- 二阶张量

$$\boldsymbol{T} = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = T^*_{ij} \boldsymbol{e}^*_i \otimes \boldsymbol{e}^*_j$$

  T_{ij} 与 T^*_{ij} 之间满足二阶坐标转换关系，而 $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ 与 $\boldsymbol{e}^*_i \otimes \boldsymbol{e}^*_j$ 为对应坐标系下的二阶基张量。

- 推而广之，对于 n 阶张量，有

$$\boldsymbol{R} = R_{i_1 \cdots\cdots i_n} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n}$$

二阶实对称张量

- 对于二阶张量 $\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$，若满足分量取实数值且 $S_{ij} = S_{ji}$，则称之为二阶实对称张量。
- 二阶张量的特征方程为

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n} \quad \text{or} \quad S_{ij}n_j = \lambda n_i$$

整理得

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \qquad \begin{cases} I_1 = S_{kk} \\ I_2 = \frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij} - S_{ii}S_{jj}) \\ I_3 = \det(S_{ij}) \end{cases}$$

- 可以证明：实对称张量特征值为实数，特征向量相互正交。

二阶实对称张量

- 将二阶张量分解为球张量 $\boldsymbol{P}$ 和偏张量 $\boldsymbol{D}$ 两部分

$$\begin{cases} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D} \\ S_{ij} = P_{ij} + D_{ij} \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{ij} = \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij} \\ D_{ij} = S_{ij} - P_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij} \end{cases}$$

- 偏张量满足 $D_{kk} = 0$，其特征方程为

$$\eta^3 - J_1\eta^2 - J_2\eta - J_3 = 0 \quad \begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} D_{ij}D_{ij} \\ J_3 = \det(D_{ij}) \end{cases}$$

- 上述讨论中给出的 I_1，I_2，I_3，J_2 以及 J_3 统称为张量 $\boldsymbol{S}$ 的不变量。

哈密尔顿—凯莱定理

基于内积定义二阶张量的整数幂函数

$$\boldsymbol{S}^n = \underbrace{\boldsymbol{S}\cdots\cdots\cdots\boldsymbol{S}}_{n\text{个}}$$

定理

张量的特征多项式也是其零化多项式

$$\boldsymbol{S}^3 - I_1\boldsymbol{S}^2 - I_2\boldsymbol{S} - I_3 = 0$$

根据此定理，可以将张量 $\boldsymbol{S}$ 的高次幂 $\boldsymbol{S}^n (n \geq 3)$ 表示为其低次幂 $(\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{I})$ 和不变量 (I_1, I_2, I_3)。

张量的偏导运算

针对张量的分量（下标）表示和抽象表示，分别采取以下方式进行偏导运算：

- 张量对下标的偏导数

$$R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} = \partial_{x_j} R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n} = \frac{\partial R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n}}{\partial x_j}$$

- 引入哈密尔顿算符

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_j$$

张量的偏导运算

- 张量场的梯度

$$\begin{cases} \nabla \otimes \boldsymbol{R} = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \\ \boldsymbol{R} \otimes \nabla = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \otimes \boldsymbol{e}_j \end{cases}$$

- 张量场的散度

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{R} & = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \\ & = R_{j i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \\ \boldsymbol{R} \cdot \nabla & = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \cdot \boldsymbol{e}_j \\ & = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots j, j} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_{n-1}} \end{cases}$$

张量场的积分

定理（向量场的高斯散度定理）

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \; d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \; dS$$

推论（分部积分公式）

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \boldsymbol{v} \; d\Omega = \oint_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \; dS - \int_{\Omega} u \nabla \cdot \boldsymbol{v} \; d\Omega$$

上述高斯散度定理及其推论可以直接推广到张量场，当然，很多细节也需要重新定义和考虑，具体的推导和表达式请参阅教材。上述张量场积分的性质和变换在之后将起到十分重要的作用。

公共邮箱

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue