结构单元模型

损伤力学基础研究生课程之十、十一

任晓丹

同济大学建筑工程系

June 29, 2016

本节主要内容

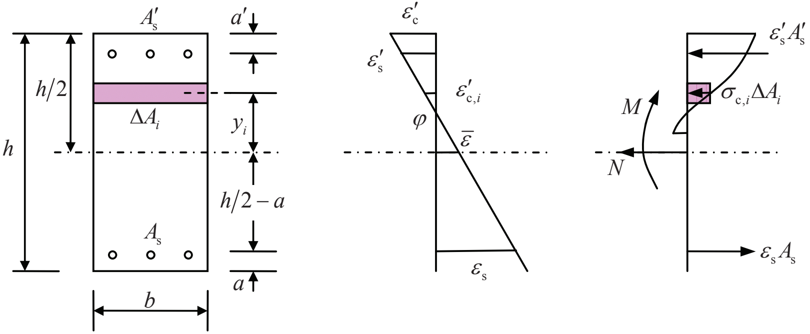
1. 梁柱单元
   - 截面分析
   - 单元模型
2. 剪力墙单元
   - 常规平板壳单元
   - 精化平板壳单元
   - 分层壳模型

第一部分：梁柱单元模型

参考文献

- 朱伯龙. 1984. 钢筋混凝土非线性分析. 同济大学出版社. 上海.
- 过镇海，时旭东. 2003. 钢筋混凝土原理和分析. 清华大学出版社. 北京.
- E. Spacone, 1994. Flexibility-based finite element models for the nonlinear static and dynamic analysis of concrete frame structures, Ph.D. Dissertation,University of California, Berkeley.
- Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran. 2000. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons.

条带法



梁截面　　应变分布　　应力分布

条带法

- 命截面曲率为 φ，截面形心处应变为 $\bar{\varepsilon}$，根据平截面假定:

$$\varepsilon(y) = \bar{\varepsilon} - y\varphi$$

- 第 i 条带处混凝土应变

$$\varepsilon_{c,i} = \bar{\varepsilon} - y_i\varphi$$

- 钢筋应变

$$\varepsilon_{\mathrm{s}}' = \bar{\varepsilon} - (\frac{h}{2} - a')\varphi$$

$$\varepsilon_{\mathrm{s}} = \bar{\varepsilon} + (\frac{h}{2} - a)\varphi$$

条带法

- 第 i 条带处混凝土应力

$$\sigma_{c,i} = f_c(\varepsilon_{c,i})$$

- 钢筋处的应力

$$\sigma'_s = f_s(\varepsilon'_s)\ ,\ \ \sigma_s = f_s(\varepsilon_s)$$

- 第 i 条带处混凝土合力

$$N_{c,i} = \sigma_{c,i}\Delta A_i$$

- 钢筋合力

$$N'_s = \sigma'_s A'_s\ ,\ \ N_s = \sigma_s A_s$$

条带法

- 轴力平衡

$$N = \sum_{i=1}^{m_c} \sigma_{\mathrm{c},i} \Delta A_i + \sigma'_{\mathrm{s}} A'_{\mathrm{s}} + \sigma_{\mathrm{s}} A_{\mathrm{s}}$$

- 弯矩平衡

$$M = -\sum_{i=1}^{m_c} \sigma_{\mathrm{c},i} \Delta A_i y_i - \sigma'_{\mathrm{s}} A'_{\mathrm{s}} \left(\frac{h}{2} - a' \right) + \sigma_{\mathrm{s}} A_{\mathrm{s}} \left(\frac{h}{2} - a \right)$$

- 上两式构成了一组非线性方程组

$$\begin{cases} N = f_N(\varphi, \bar{\varepsilon}) \\ M = f_M(\varphi, \bar{\varepsilon}) \end{cases}$$

条带法

- 上述非线性方程组的求解，即对于 M、N、φ、$\bar{\varepsilon}$，给定两个，求解另外两个：
  - 给定 φ、$\bar{\varepsilon}$，求 M、N，直接显式代入，不用迭代；
  - 给定 φ、N，求解 $\bar{\varepsilon}$、M，须先隐式求解第一个方程求得 $\bar{\varepsilon}$，再代入第二个方程

$$N = f_N(\varphi, \bar{\varepsilon})$$

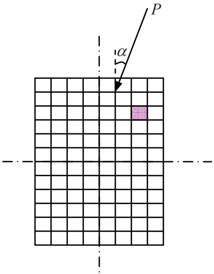
  - 通常上述方程是适定的，采用 Newton 方法等容易求解；
  - 给定 M、N，求解 φ、$\bar{\varepsilon}$，需要隐式求解两个方程

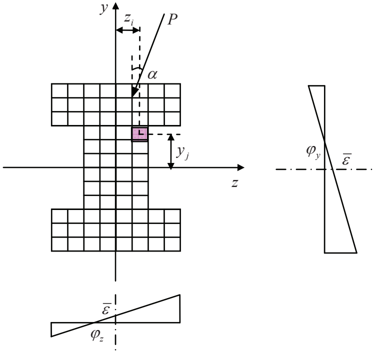
$$\begin{cases} N = f_N(\varphi, \bar{\varepsilon}) \\ M = f_M(\varphi, \bar{\varepsilon}) \end{cases}$$

  - 由于混凝土的软化，上述方程组可能不适定，某些特定的情况下较难求解。

网格法

- 当荷载不是作用在截面的主对称轴平面内、或者截面的形式较为复杂 (如非对称平面) 时，可以采用网格划分截面。





网格法（全量分析）

- 任意网格处的应变: $\varepsilon_{\mathrm{c/s},i,j} = \bar{\varepsilon} - z_j\varphi_y - y_i\varphi_z$
- 据此可求得任意网格处混凝土的应力和钢筋的应力

$$\sigma_{c,i,j} = f_c(\varepsilon_{\mathrm{c},i,j}) \ , \ \sigma_{s,i,j} = f_s(\varepsilon_{\mathrm{s},i,j})$$

- 轴力平衡

$$N = \sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}\sigma_{\mathrm{c},i,j}\Delta A_{i,j} + \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{s}}}\sigma_{\mathrm{s},k}A_{\mathrm{s},k}$$

- 两个方向的弯矩平衡

$$\begin{cases} M_y = -\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}\sigma_{\mathrm{c},i,j}\Delta A_{i,j}z_j - \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{s}}}\sigma_{\mathrm{s},k}A_{\mathrm{s},k}z_k \\ M_z = -\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{i=1}^{n_x}\sigma_{\mathrm{c},i,j}\Delta A_{i,j}y_i - \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{s}}}\sigma_{\mathrm{s},k}A_{\mathrm{s},k}y_k \end{cases}$$

网格法（全量分析）

- 构成三个非线性方程

$$\begin{cases} N = f_N(\varphi_y, \varphi_z, \bar{\varepsilon}) \\ M_y = f_{M_y}(\varphi_y, \varphi_z, \bar{\varepsilon}) \\ M_z = f_{M_z}(\varphi_y, \varphi_z, \bar{\varepsilon}) \end{cases}$$

- 若考虑加载过程中荷载角度 α 不变，有

$$\frac{M_y}{M_z} = \tan\alpha$$

- 可得附加方程

$$f_{M_y}(\varphi_y, \varphi_z, \bar{\varepsilon}) - f_{M_z}(\varphi_y, \varphi_z, \bar{\varepsilon}) \tan\alpha = 0$$

- 利用非线性系统求解方法，可求解上述非线性方程（组）。

网格法（增量分析）

- 任意网格处的应变增量

$$\Delta\varepsilon_{\mathrm{c/s},i,j} = \Delta\bar{\varepsilon} - z_j\Delta\varphi_y - y_i\Delta\varphi_z$$

- 写成矩阵形式，有

$$\{\Delta\varepsilon\} = [I(z,y)]\{\Delta\Psi\}$$

- 其中应变增量向量

$$\{\Delta\varepsilon\} = [\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \ldots\ldots, \Delta\varepsilon_n]^T$$

- 形函数矩阵

$$[I(z,y)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ -z_1 & -z_2 & \ldots\ldots & -z_n \\ -y_1 & -y_2 & \ldots\ldots & -y_n \end{bmatrix}^T$$

网格法（增量分析）

- 考虑材料本构关系，可得混凝土和钢筋的应力

$$\begin{cases} \{\Delta\sigma_c\} = [E_c]\{\Delta\varepsilon\} \\ \{\Delta\sigma_s\} = [E_s]\{\Delta\varepsilon\} \end{cases}$$

- 其中应力增量向量

$$\begin{cases} \{\Delta\sigma_c\} = [\Delta\sigma_{c1}, \Delta\sigma_{c2}, \ldots\ldots, \Delta\sigma_{cn}]^T \\ \{\Delta\sigma_s\} = [\Delta\sigma_{s1}, \Delta\sigma_{s2}, \ldots\ldots, \Delta\sigma_{sn}]^T \end{cases}$$

- 切线刚度矩阵

$$\begin{cases} [E_c] = diag\{E_{c1}, E_{c2}, \ldots\ldots, E_{cn}\} \\ [E_s] = diag\{E_{s1}, E_{s2}, \ldots\ldots, E_{sn}\} \end{cases}$$

网格法（增量分析）

- 增量平衡方程

$$\Delta N = \int_{Ac} \Delta\sigma_c dA + \sum_i \Delta\sigma_{si} A_{si}$$

$$\Delta M_y = -\int_{Ac} \Delta\sigma_c z dA - \sum_i \Delta\sigma_{si} z_{si} A_{si}$$

$$\Delta M_z = -\int_{Ac} \Delta\sigma_c y dA - \sum_i \Delta\sigma_{si} y_{si} A_{si}$$

- 写成矩阵形式，有

$$\{\Delta F\} = \int_{A_c} I(z, y)^T \Delta\sigma_c dA + \sum_i I(z_i, y_i)^T \Delta\sigma_{si} A_{si}$$

网格法（增量分析）

- 截面网格离散之后，有

$$\{\Delta F\} = [I(z, y)]^T([A_c]\{\Delta\sigma_c\} + [A_s]\{\Delta\sigma_s\})$$

- 其中各网格内混凝土和钢筋的面积如下，且网格内没有钢筋的钢筋面积记为 0

$$\begin{cases} [A_c] = diag\{A_{c1}, A_{c2}, \ldots\ldots, A_{cn}\} \\ [A_s] = diag\{A_{s1}, A_{s2}, \ldots\ldots, A_{sn}\} \end{cases}$$

- 整理之后，可得截面内力 -位移之间的增量关系如下

$$\{\Delta F\} = [D_T]\{\Delta\Psi\}$$

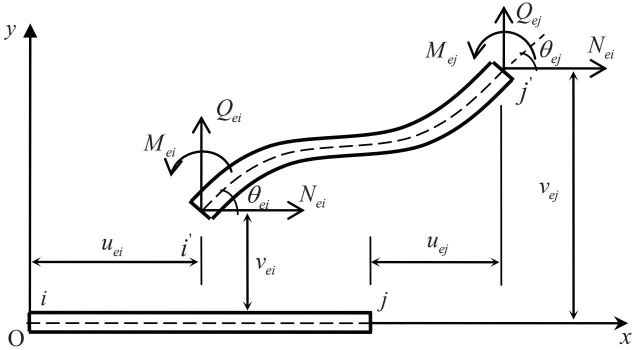
- 刚度矩阵

$$[D_T] = [I(z, y)]^T[E_{cs}][I(z, y)]$$
$$[E_{cs}] = [E_c][A_c] + [E_s][A_s]$$

若干评论

- 条带模型与网格模型，是纤维模型在截面分析层面的基础；
- 矩阵形式的增量网格模型，可直接接入构件数值分析的算法框架；
- 截面的条带和网格的划分，其目的是为了截面状态量的积分；
- 由于截面应力分布具有不连续性，高阶的截面积分策略，如高斯积分策略，并不能得到高精度的结果；
- 条带与网格模型，不能直接用于截面（非线性）剪切和扭转的分析。

梁单元示


y
Q_{ej}
M_{ej}
θ_{ej}
N_{ei}
j'
Q_{ei}
M_{ei}
θ_{ei}
N_{ei}
v_{ej}
u_{ei}
i'
v_{ei}
u_{ej}
i
j
O
x

梁单元示意图

位移插值梁单元

- 节点力向量

$$\boldsymbol{Q}_i = \{N_i, Q_{yi}, Q_{zi}, M_{yi}, M_{zi}\}^T,\ \boldsymbol{Q}_j = \{N_j, Q_{yj}, Q_{zj}, M_{yj}, M_{zj}\}^T$$

- 节点位移向量

$$\boldsymbol{d}_i = \{u_i, v_{yi}, v_{zi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T,\ \boldsymbol{d}_j = \{u_j, v_{yj}, v_{zj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}\}^T$$

- 轴向位移可采用线性插值表示

$$u(x) = u_i\frac{l-x}{l} + u_j\frac{x}{l} = u_i\phi_1(x) + u_j\phi_2(x)$$

位移插值梁单元

- 侧向位移与转角之间存在换算关系，二者结合可采用厄米插值

$$
\begin{aligned}
v_y(x) &= v_{iy}(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}) + v_{yj}(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}) \\
&\quad + \theta_{yi}(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^3}) + \theta_{yj}(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}) \\
&= v_{yi}\phi_3(x) + v_{yj}\phi_4(x) + \theta_{yi}\phi_5(x) + \theta_{yj}\phi_6(x)
\end{aligned}
$$

- y 方向与 z 方向插值函数相同，插值函数矩阵表示为

$$
\boldsymbol{N}(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_u(x) \\ \boldsymbol{N}_{v_y}(x) \\ \boldsymbol{N}_{v_z}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 & \phi_5 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & \phi_6 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 & 0 & \phi_5 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & \phi_6 \end{bmatrix}
$$

位移插值梁单元

- 单元内位移场与杆端位移的关系

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v_y(x) \\ v_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_u(x) \\ \boldsymbol{N}_{v_y}(x) \\ \boldsymbol{N}_{v_z}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_i \\ \boldsymbol{d}_j \end{Bmatrix}$$

- 不考虑杆件的大变形问题，则轴向应变与截面曲率存在如下关系

$$\bar{\varepsilon} = \frac{du(x)}{dx}\ ,\ \varphi_y = \frac{d^2 v_y(x)}{dx^2}\ ,\ \varphi_z = \frac{d^2 v_z(x)}{dx^2}$$

- 代入位移插值表达式，可得

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\boldsymbol{N}_u(x)}{dx} \\ \frac{d^2 \boldsymbol{N}_{v_y}(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2 \boldsymbol{N}_{v_z}(x)}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_i \\ \boldsymbol{d}_j \end{Bmatrix} := \boldsymbol{B}\boldsymbol{d}$$

位移插值梁单元

- 令 $\boldsymbol{\Psi}=\{\bar{\varepsilon},\varphi_y,\varphi_z\}^T$，考虑状态量增量的插值，有

$$\Delta\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{d}$$

- 单元内部内力增量可由网格模型所得截面刚度矩阵 $\boldsymbol{D}_T$ 表示

$$\Delta\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_T\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{d}$$

- 由增量虚功原理

$$\int_e \Delta\boldsymbol{F}\delta\Delta\boldsymbol{\Psi}\,ds=\Delta\boldsymbol{Q}\delta\Delta\boldsymbol{d}$$

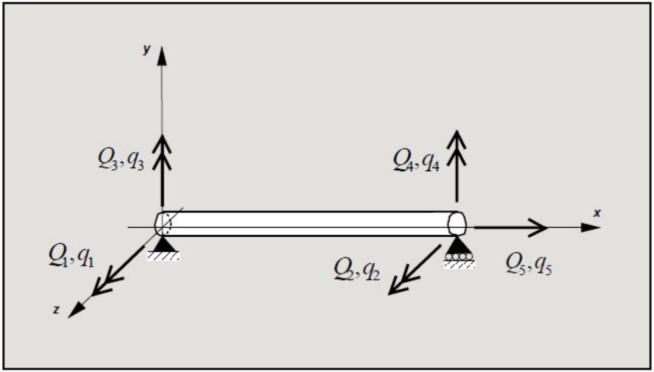
- 得增量控制方程和切线刚度张量

$$\boldsymbol{k}\Delta\boldsymbol{d}=\Delta\boldsymbol{Q}\ ,\ \ \boldsymbol{k}=\int_e \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}_T\boldsymbol{B}ds$$

若干评论

- 将梁单元模型与条带法或者网格法结合，即得到经典的基于位移插值的纤维梁模型；
- 利用截面分析实现细观意义上的应力 -应变关系到构件内力 -变形关系的转换，在混凝土力学中具有普遍价值；
- 这里给出的，基于厄米插值构造的梁单元，仅是这类模型的一种较为常用的特例，原则上讲，一般的基于位移插值的梁单元格式，均可以应用于纤维梁单元的构造；
- 对于混凝土框架结构，原则上可以以实际的结构构件作为分析中的基本单元，但研究经验表明：若对于每一个梁、柱构件再做有限段的单元划分，则有助于提高结构进入严重性能退化阶段后的分析数值稳定性；
- 当结构进入大变形状态时，应该考虑几何非线性对单元刚度矩阵的影响。

内力插值梁单元模型



对于基于内力插值的梁单元模型，为了保证柔度矩阵逆的存在性，需要先移除刚体位移，从而考虑上述5 个自由度。

内力插值梁单元模型

- 考虑 5 个自由度上的广义力和广义位移向量

$$\boldsymbol{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}^T$$
$$\boldsymbol{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}^T$$

- 基于内力插值，单元内力可以采用单元端部内力插值给出

$$\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{b}(x)\,\boldsymbol{Q}$$

- 无外力作用在中段的杆件，内力插值函数可采用线性函数

$$\boldsymbol{b}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{l} - 1 & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{l} - 1 & \frac{x}{l} \end{bmatrix}$$

内力插值梁单元模型

- 获得各截面内力之后，采用柔度矩阵即可求得各截面变形

$$\Delta\boldsymbol{\Psi}(x) = \tilde{\boldsymbol{f}}(x)\Delta\boldsymbol{F}(x)\ ,\ \tilde{\boldsymbol{f}}(x) = \boldsymbol{D}_T^{-1}(x)$$

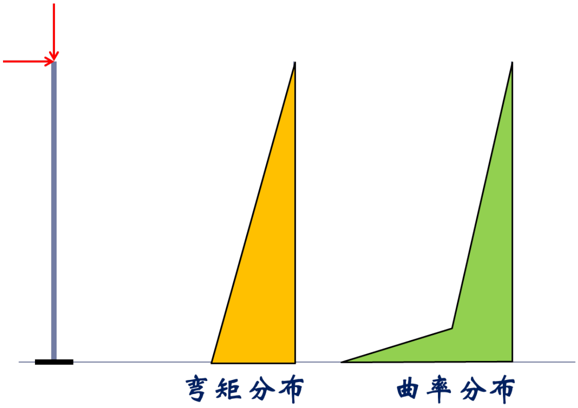
- 由增量虚功原理

$$\int_e \delta\Delta\boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{\Psi}\,ds = \delta\Delta\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{q}$$

- 代入前述表达式可得控制方程和单元柔度矩阵

$$\boldsymbol{f}\Delta\boldsymbol{Q} = \Delta\boldsymbol{q}\ ,\ \boldsymbol{f} = \int_e \boldsymbol{b}^T(x)\tilde{\boldsymbol{f}}(x)\boldsymbol{b}^T(x)\,ds$$

位移插值梁单元与力插值梁单元比较



内力插值函数的构造比位移插值函数的构造简单！！

第二部分：剪力墙单元模型

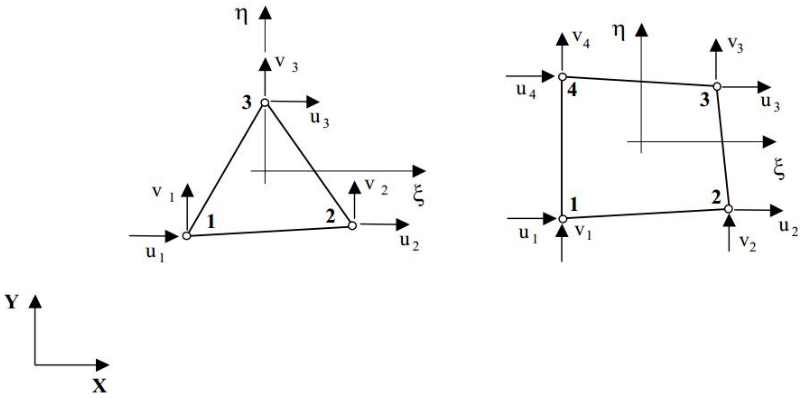
参考文献

- 吕西林、金国芳、吴晓涵. 1999. 钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用. 同济大学出版社. 上海.
- T.T.C. Hsu and Y.L. Mo. 2010. Unified theory and concrete structures. John Wiley & Sons. New York.
- Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran. 2000. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons.

剪力墙非线性分析概述

- 与混凝土框架结构分析相比，混凝土剪力墙结构的分析方法还远未成熟；
- 现有的研究成果，可以划分以简化内力 -变形关系为特征的构件宏单元模型和基于细观应力 -应变关系的板壳力学模型；
- 基于细观应力 -应变关系的板壳力学模型的基本思路是：
  - 将剪力墙视为单一或分层的平板壳，建立局部内力 -变形关系；
  - 分别考虑面内作用与弯曲作用：利用平面应力分析建立构件轴力、剪力与细观正应变、剪应变之间的联系；利用薄板理论建立构件弯矩与截面曲率之间的联系；
  - 利用微分关系，将两种不同类型的单元切线刚度加以叠加，形成平板壳单元的切线刚度矩阵；
  - 利用有限元刚度集成的方法进行整体结构的非线性分析。

平面应力单元（膜单元）



平面应力单元（膜单元）

- 坐标插值与位移插值

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} f_i(\xi,\eta)x_i \\ y = \sum_{i=1}^{n} f_i(\xi,\eta)y_i \end{cases} \quad \begin{cases} u = \sum_{i=1}^{n} f_i(\xi,\eta)u_i \\ v = \sum_{i=1}^{n} f_i(\xi,\eta)v_i \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\boldsymbol{q}$$

- 插值函数（以四节点平面单元为例）

$$f_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \quad i = 1,2,3,4$$

- 应变表达式

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{q}$$

平面应力单元（膜单元）

- 线弹性应力应变关系（平面应力）

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon},\ [E] = \frac{E_0}{1-\nu_0^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix}$$

- 非线性本构关系

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}^{\tan} d\boldsymbol{\varepsilon}$$

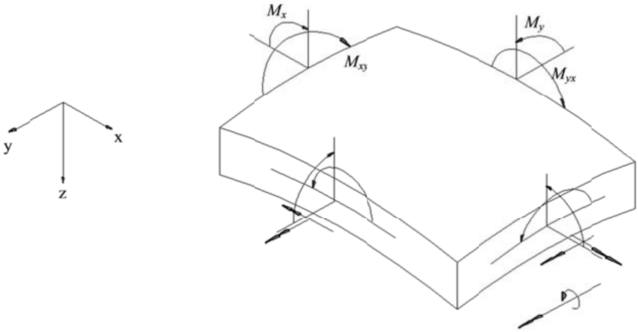
- 考虑增量弱形式

$$\int_\Omega \Delta\boldsymbol{\sigma}_n : \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n d\Omega + \int_\Omega \Delta\boldsymbol{b}_n \cdot \delta\Delta\boldsymbol{u}_n d\Omega - \int_{\Gamma_t} \Delta\boldsymbol{t}_n \cdot \delta\Delta\boldsymbol{u}_n d\Gamma = 0$$

- 可得单元切线刚度

$$\boldsymbol{k}_m = \int_e \boldsymbol{B}_m^T \boldsymbol{E}^{\tan} \boldsymbol{B}_m d\Omega$$

板的内力



薄板理论

- 平板的位移

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} w & \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}^T$$

- 转角关系

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

- 曲率关系

$$\psi_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \psi_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\psi_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_x & \psi_y & \psi_{xy} \end{bmatrix}^T$$

薄板理论

- 平板内力

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}^T$$

- 平衡条件

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0$$

- 内力 -曲率关系

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D}_f \boldsymbol{\Psi}$$

薄板理论

- 平板控制方程强形式

$$(\boldsymbol{L\nabla})^T \boldsymbol{D}_f (\boldsymbol{L\nabla}) w = q(x, y)$$

$$\boldsymbol{L\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T$$

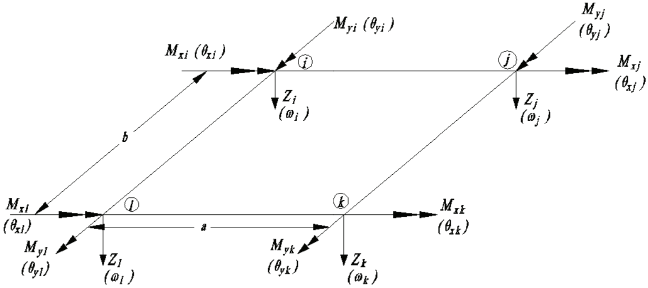
- 虚功原理

$$\int_\Omega \boldsymbol{M} \delta \boldsymbol{\Psi} \, d\Omega = \int_\Omega q(x, y) \delta w d\Omega$$

- 控制方程弱形式

$$\int_\Omega [(\boldsymbol{L\nabla})^T \boldsymbol{D}_f w][(\boldsymbol{L\nabla}) \delta w] \, d\Omega = \int_\Omega q(x, y) \delta w d\Omega$$

四节点平板单元


M_{yi} (θ_{yi})
M_{xi} (θ_{xi})
i
j
M_{yj}
(θ_{yj})
M_{xj}
(θ_{xj})
Z_i
(ω_i)
Z_j
(ω_j)
b
M_{xl}
(θ_{xl})
l
k
M_{xk}
(θ_{xk})
a
M_{yl}
(θ_{yl})
Z_l
(ω_l)
M_{yk}
(θ_{yk})
Z_k
(ω_k)

四节点平板单元

- 四节点位移自由度向量

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_1 & \boldsymbol{\delta}_2 & \boldsymbol{\delta}_3 & \boldsymbol{\delta}_4\end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{\delta}_i=\begin{bmatrix}w_i & \theta_{ix} & \theta_{iy}\end{bmatrix}^T$$

- 采用包含 12 个（广义）自由度的多项式函数作为挠度插值函数

$$\begin{aligned}w=&\ a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2+a_7x^3\\&+a_8x^2y+a_9xy^2+a_{10}y^3+a_{11}x^3y+a_{12}xy^3\end{aligned}$$

- 将 4 个节点的 12 个广义位移代入上式，可解得 12 个多项式系数，进而整理得到插值函数表达式:

$$w=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}\ ,\ \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 & \boldsymbol{N}_3 & \boldsymbol{N}_4\end{bmatrix}^T$$

四节点平板单元

- 插值函数表达式（二维厄米插值）

$$\boldsymbol{N}_i = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} (\xi_0+1)(\eta_0+1)\left(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2\right) \\ b\eta_i(\xi_0+1)(\eta_0+1)^2(\eta_0-1) \\ -a\xi_i(\xi_0+1)^2(\eta_0+1)(\xi_0-1) \end{bmatrix}$$

- 其中

$$\xi = (x-x_c)/a\ ,\ \eta = (y-y_c)/b,\quad \xi_0 = \xi\xi_i\ ,\ \eta_0 = \eta\eta_i$$

- 曲率向量

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\nabla} w = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{B}_p\boldsymbol{\delta}$$

- 代入平板控制方程的弱形式，可得刚度矩阵

$$\boldsymbol{k}_p = \int_e \boldsymbol{B}_p^T\boldsymbol{D}_f\boldsymbol{B}_p d\Omega$$

平板壳单元

- 将膜自由度与板自由度综合，可同时考虑平面内和平面外变形，即得平板壳单元

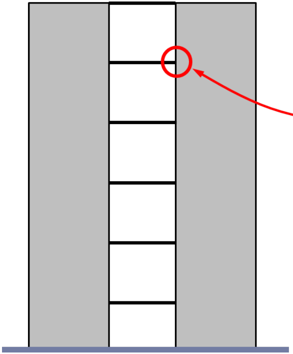
$$\boldsymbol{\delta}^e = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_4 | \boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3, \boldsymbol{\delta}_4]^T$$

- 单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{k}^e = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{k}_m]_{8\times 8} & \\ & [\boldsymbol{k}_p]_{12\times 12} \end{bmatrix}$$

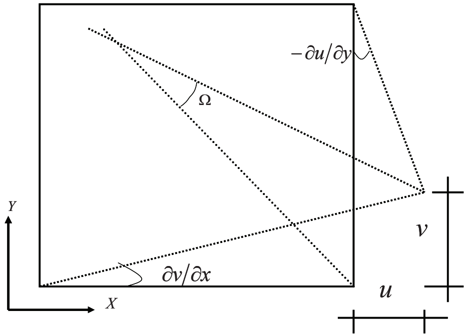
- 有限元分析中，常常将同一个节点的自由度写在一起，此时刚度矩阵的排列顺序也要相应调整。

考虑节点旋转自由度的膜单元

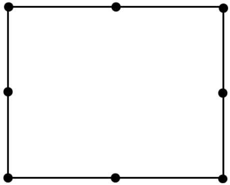


常规平面单元在与梁连接节点不具有转角协调

考虑节点旋转自由度的膜单元

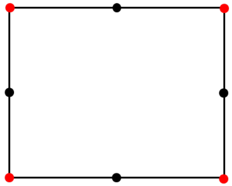


考虑节点旋转自由度的膜单元



$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}$$

只考虑平动自由度



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\theta = \mathbf{N}\mathbf{u} + \mathbf{N}_\theta \boldsymbol{\theta}$$

考虑平动和转动自由度

考虑节点旋转自由度的膜单元

- 平动位移表达式

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} & \\ & \boldsymbol{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{Bmatrix}$$

- 插值函数

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{\phi}(x, y)\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$\boldsymbol{\phi}(x, y) = [1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2]$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} = [&\boldsymbol{\phi}^T(x_1, y_1), \boldsymbol{\phi}^T(x_2, y_2), \boldsymbol{\phi}^T(x_3, y_3), \boldsymbol{\phi}^T(x_4, y_4),\\ &\boldsymbol{\phi}^T(x_5, y_5), \boldsymbol{\phi}^T(x_6, y_6), \boldsymbol{\phi}^T(x_7, y_7), \boldsymbol{\phi}^T(x_8, y_8)]^T\end{aligned}$$

- 由此构成的单元为非协调元，单元边为直边时可以通过分片实验，曲边时不能通过分片实验。

考虑节点旋转自由度的膜单元

- 为了考虑曲边界的影响，再增加两项

$$\boldsymbol{u}_0^* = \boldsymbol{u}_0 + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 为了确定待定系数，引入单元间弱连续条件

$$\begin{cases} \iint_e \frac{\partial \boldsymbol{u}_0^*}{\partial x} d\Omega = \oint_e \boldsymbol{u}_0^* n_x ds \\ \iint_e \frac{\partial \boldsymbol{u}_0^*}{\partial y} d\Omega = \oint_e \boldsymbol{u}_0^* n_y ds \end{cases}$$

- 利用上述方程即可求得待定系数 α_1，α_2，进而可得改进的形函数

$$\boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}_\alpha$$

- 同理，也可以采用相同的思路改进 $\boldsymbol{v}_0^*$ 的插值函数。

考虑节点旋转自由度的膜单元

- 考虑转角位移，采用四个角点位移作为插值节点

$$\boldsymbol{u}_\theta = \begin{Bmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{Bmatrix} N_{u\theta i} \\ N_{v\theta i} \end{Bmatrix} \theta_i$$

- 其中

$$\begin{cases} N_{u\theta i} & = \frac{1}{8}\left[\xi_i\left(1-\xi^2\right)\left(b_1+b_3\eta_i\right)\left(1+\eta_i\eta\right)\right. \\ & \left.+\eta_i\left(1-\eta^2\right)\left(b_2+b_3\xi_i\right)\left(1+\xi_i\xi\right)\right] \\ N_{v\theta i} & = -\frac{1}{8}\left[\xi_i\left(1-\xi^2\right)\left(a_1+a_3\eta_i\right)\left(1+\eta_i\eta\right)\right. \\ & \left.+\eta_i\left(1-\eta^2\right)\left(a_2+a_3\xi_i\right)\left(1+\xi_i\xi\right)\right] \end{cases}$$

考虑节点旋转自由度的膜单元

- 综合考虑平动自由度和转动自由度

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} N_i^* & 0 & N_{u\theta i} \\ 0 & N_i^* & N_{v\theta i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=5}^{8} \begin{bmatrix} N_i^* & 0 \\ 0 & N_i^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}^* \boldsymbol{u}$$

- 应变

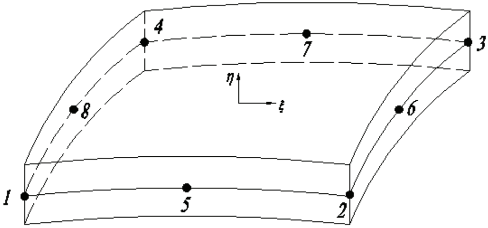
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}_m \boldsymbol{u}$$

- 进一步可得刚度矩阵

$$\boldsymbol{k}_m = \int_e \boldsymbol{B}_m^T \boldsymbol{E}^{\tan} \boldsymbol{B}_m d\Omega = [k_m]_{20\times 20}$$

- $\boldsymbol{E}^{\tan}$ 可由（二维）本构关系直接得到。

8 节点 Mindlin 板单元



- 考虑挠度插值函数

$$w = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2$$

8 节点 Mindlin 板单元

- 每个节点考虑三个广义位移自由度，有

$$\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3, \boldsymbol{\delta}_4, \boldsymbol{\delta}_5, \boldsymbol{\delta}_6, \boldsymbol{\delta}_7, \boldsymbol{\delta}_8]^T$$

$$\boldsymbol{\delta}_i = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]$$

- 插值表达式

$$w = \sum_{i=1}^{8} N_i w_i \ , \quad \theta_x = \sum_{i=1}^{8} N_i \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^{8} N_i \theta_{yi}$$

- 插值函数表达式

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1) \quad i = 1 \sim 4$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) \quad i = 5, 7$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i) \quad i = 6, 8$$

8 节点 Mindlin 板单元

- 板的弯曲变形

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{Bmatrix}\psi_x\\ \psi_y\\ \psi_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y}\\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w\\ \theta_x\\ \theta_y\end{Bmatrix}=\boldsymbol{B}_M\boldsymbol{\delta}$$

- 板的剪切变形

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\\ \frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w\\ \theta_x\\ \theta_y\end{Bmatrix}=\boldsymbol{B}_S\boldsymbol{\delta}$$

- 变形与内力关系

$$\boldsymbol{M}=\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}D_x & D_v & 0\\ D_v & D_y & 0\\ 0 & 0 & D_{xy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_x\\ \psi_y\\ \psi_{xy}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{D}_f\boldsymbol{\Psi}$$

8 节点 Mindlin 板单元

- 对于挠度和转角分别插值的 Mindlin 板单元，考虑如下形式的势能泛函

$$\Pi_p = \iint_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{D}_f\boldsymbol{\Psi}\,d\Omega + \iint_\Omega \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha}_S\boldsymbol{\gamma}\,d\Omega - \iint_\Omega qw\,d\Omega$$

- 其中第一项为弯曲变形引起的变形能，第二、三项为剪切变形引起的变形能, 罚数向量 $\boldsymbol{\alpha} = diag\{\alpha_1, \alpha_2\}$。
- 势能变分，可得

$$\delta\Pi_p = \iint_\Omega \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{D}_f\delta\boldsymbol{\Psi}\,d\Omega + \iint_\Omega 2\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha}_S\delta\boldsymbol{\gamma}\,d\Omega - \iint_\Omega q\delta w\,d\Omega = 0$$

8 节点 Mindlin 板单元

- 由势能变分，可得单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{k}_p = \boldsymbol{k}_M + \boldsymbol{k}_S$$

- 弯曲刚度矩阵

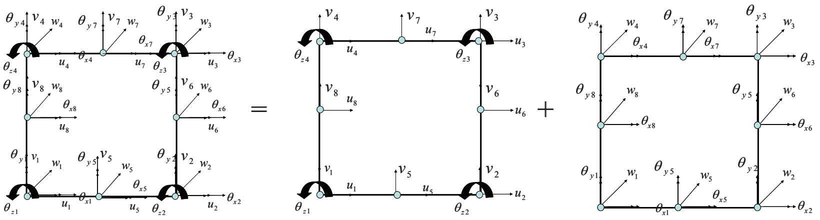
$$\boldsymbol{k}_M = \iint_\Omega \boldsymbol{B}_M^T \boldsymbol{D}_f \boldsymbol{B}_M d\Omega$$

- 剪切刚度矩阵

$$\boldsymbol{k}_S = \iint_\Omega \boldsymbol{B}_S^T \boldsymbol{\alpha}_S \boldsymbol{B}_S d\Omega$$

- $\boldsymbol{D}_f$ 可采用分层壳模型结合材料二维本构关系求得；$\boldsymbol{\alpha}_S$ 一般只能考虑线性剪切变形的影响，通常取值为 $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{Gh}{2k}$。

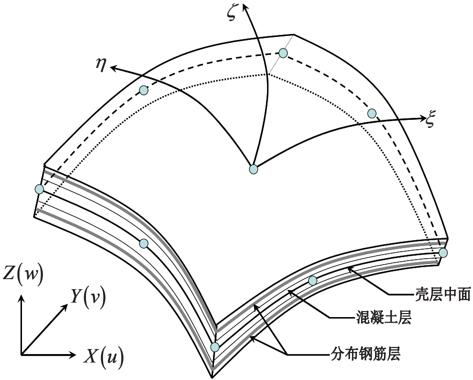
精化平板壳单元



精化平板壳单元　　精化膜单元　　8 节点 Mindlin 板单元

- 总自由度数 = 膜单元自由度数（$8\times2+4$）+ 板单元自由度数（8×3）$=44$；
- 根据节点顺序排布各个自由度的位置，刚度矩阵表示为膜单元与板单元刚度矩阵的综合；
- 能够较为完整的描述剪力墙的变形和内力性能，但没有充分考虑应变局部化等效应。

分层壳模型



分层壳模型

- 平板上任意点的应变可分为两个部分（采用向量表示）

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_f$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 由平面内变形引起，对应分析中的膜单元

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \nabla^s \boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

- 弯曲变形所引起的应变，基于 Kirchoff 假定可以表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = z\boldsymbol{\Psi} = z \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_{xy} \end{Bmatrix}$$

分层壳模型

- 混凝土本构关系
  - 线弹性应力应变关系

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

  - 非线性应力应变关系

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{E}^{tan} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

- 钢筋本构关系
  - 线弹性阶段：$\sigma = E_s\varepsilon$
  - 非线性阶段：$d\sigma = E_p d\varepsilon$

分层壳模型

- 薄膜力

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma}\, dz$$

- 弯曲力

$$\boldsymbol{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\boldsymbol{\sigma}\, dz$$

- 线弹性问题

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_f)\, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{\varepsilon}_0\, dz = h\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{\varepsilon}_0 \Rightarrow \boldsymbol{D}_{Tm} = h\boldsymbol{E}_0$$

$$\boldsymbol{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_f)\, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{\Phi}\, dz = \frac{h^3}{12}\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{\Phi} \Rightarrow \boldsymbol{D}_f = \frac{h^3}{12}\boldsymbol{E}_0$$

分层壳模型

- 考虑材料非线性
- 薄膜应力率

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{E}_{cs}^{tan}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_f)\,dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{E}_{cs}^{tan}\,dz\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \Rightarrow \boldsymbol{D}_{Tm} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{E}_{cs}^{tan}\,dz$$

- 弯曲内力率

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\boldsymbol{E}_{cs}^{tan}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_f)\,dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\boldsymbol{E}_{cs}^{tan}\,dz\dot{\boldsymbol{\Phi}} \Rightarrow \boldsymbol{D}_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\boldsymbol{E}_{cs}^{tan}\,dz$$

若干评论

- 平板壳单元适合剪力墙等结构构件的非线性模拟；
- 平板壳单元单元的内力变形关系需要基于分层壳模型确定，而分层壳模型需要材料的二维本构关系作为基础；
- 目前的平板壳单元多基于位移插值；
- 存在锁闭、沙漏等问题，计算中需注意；
- 分层平板壳单元作为常规的非线性壳单元，与目前的计算软件（Abaqus 等）中的非线性壳单元，具有对应性。

期末大作业

- 登录 PEER Structural Performance Database，下载你认为合理的柱子实验记录（要求实验曲线包含下降段）；
- 根据试验记录信息，选择合理的计算软件（ABAQUS 或 OpenSEES 等），建立合理的构件分析模型（要求分别采用梁单元模型和实体单元模型计算，并对比和分析计算结果）；
- 结合实验记录的材料性质，选取合理的混凝土与钢筋的本构关系，进行构件的非线性数值模拟；
- 形成完整的分析结果报告，报告中必须详细给出计算所采用的各种参数以及细节信息的信息，并详细讨论模拟结果与实验结果的异同。

结束

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue