结构随机非线性分析
损伤力学基础研究生课程之十三

任晓丹

同济大学建筑工程系

September 29, 2017

本节主要内容

1. 结构随机分析简介
    - 结构随机分析
2. 结构随机非线性分析的概率密度演化方法
    - 概率密度演化方程
    - 广义密度演化方程的求解
3. 算例与验证

参考文献

- 李杰. 1996. 随机结构系统——分析与建模. 北京, 科学出版社.
- Jie Li and Jianbing Chen. 2009. Stochastic Dynamics of Structures. John Wiley & Sons, Singapore.
- and so on.

结构控制方程

- 结构静力方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

- 考虑输入的随机性

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\,,\quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Theta})\,,$$ $\boldsymbol{\Theta}$: 随机变（向）量

- 考虑结构的随机性

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\,,\quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\Theta})$$

- 线性结构在静力作用下，其输入随机性问题较为简单；结构随机性问题却由于随机性的引入而转化为一类随机非线性问题，此类问题是结构静力随机分析的重要研究对象。

结构控制方程

- 结构动力方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

- 考虑输入的随机性

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\ ,\quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Theta}, t)$$

- 考虑结构的随机性

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\Theta}_M, t)\ ,\quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\Theta}_C, t)\ ,\quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\Theta}_K, t)$$

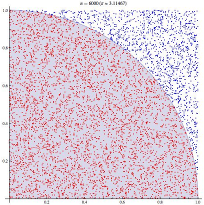
- 对于线性结构，其输入随机性问题，在随机振动理论中有成熟的求解方法；线性结构的结构随机性问题，一般参照静力随机结构问题的方法；非线性结构的随机分析问题的完整求解，则需要借助于概率密度演化方法。

Monte-Carlo 方法 (refer to wikipedia)

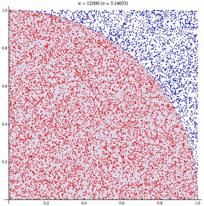
- Monte Carlo methods (or Monte Carlo experiments) are a class of computational algorithms that rely on repeated random sampling to compute their results.
- The Monte Carlo method was coined in the 1940s by John von Neumann, Stanislaw Ulam and Nicholas Metropolis, while they were working on nuclear weapon projects (Manhattan Project) in the Los Alamos National Laboratory. It was named after the Monte Carlo Casino, a famous casino where Ulam's uncle often gambled away his money.

Monte-Carlo 方法 (refer to wikipedia)

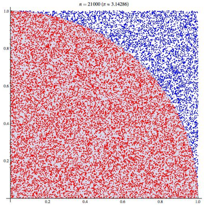
- 用 MC 方法计算 π：



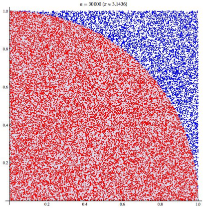
$n = 6000, \pi = 3.11467$



$n = 12000, \pi = 3.14633$



$n = 21000, \pi = 3.14286$



$n = 30000, \pi = 3.14360$

Monte-Carlo 方法 (refer to wikipedia)

- Monte Carlo methods vary, but tend to follow a particular pattern:
  - Define a domain of possible inputs.
  - Generate inputs randomly from a probability distribution over the domain.
  - Perform a deterministic computation on the inputs.
  - Aggregate the results.
- Random Number Generation

$$X_{n+1} = (aX_n + b) \mod m$$

几点评论

- 结构随机分析与结构可靠度分析密切相关，前者是后者的理论基础与算法途径；
- 基于摄动方法、正交多项式展开等方法，可以建立随机有限元方法，用于结构的随机分析；
- 较之于确定性结构分析，结构随机分析的计算量至少增加一个数量级，此为获得结构的随机性为所必须付出的代价，过分要求算法的计算量小是不现实的；
- 除了 Monte-Carlo 方法，传统随机结构分析方法缺乏对于非线性随机系统的具有普遍性的的描述和求解能力；

概率密度演化理论

- 考虑如下随机非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{Y}, t) \ , \ \ \boldsymbol{Y}(t_0) = \boldsymbol{Y}_0$$

- 上述表达式可以看作随机非线性系统的欧拉（Eulerian）描述，同样也可以建立起其拉格朗日（Lagrangian）描述，有

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{Y}_0, t) \ \ \text{or} \ \ \dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{Y}_0, t)$$

- 其中 $\boldsymbol{h} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$。可以证明，存在 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是的上述拉格朗日描述与欧拉描述等价，但是二者的显式表达式并不一定，当然也不需要，能解出。

概率密度演化理论

- 除了结构的基本状态量 $\boldsymbol{Y}$，我们可能还需要附加状态量的信息，定义二者的转换算符 ψ 满足

$$\dot{\boldsymbol{Z}} = \psi[\,\dot{\boldsymbol{Y}}(t)]$$

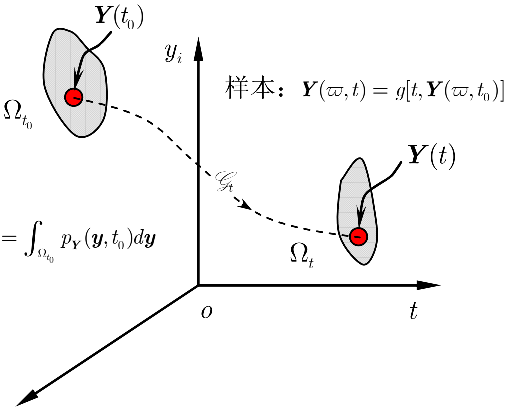
- 那么 $\boldsymbol{Z}$ 的控制方程的拉格朗日形式可以写为

$$\dot{\boldsymbol{Z}} = \psi[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\Theta},\, \boldsymbol{Y}_0, t)] := \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\Theta}, t)$$

- 考虑联合随机向量 $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\Theta})$ 的联合概率密度函数 $p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}, t)$，满足如下概率守恒

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t \times D_{\boldsymbol{\theta}}} p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}, t)\, d\boldsymbol{z} d\boldsymbol{\theta} = 0$$

概率密度演化理论



系综： $\Omega_t = g(t,\Omega_{t_0})$

概率： $\int_{\Omega_t} p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} = \int_{\Omega_{t_0}} p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y},t_0)d\boldsymbol{y}$

概率守恒定律

概率密度演化理论

- 习之

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t\times D_{\boldsymbol{\theta}}} p_{\boldsymbol{Z\Theta}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta},t)d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{\theta} = \frac{D}{Dt}\int_{D_{t_0}\times D_{\boldsymbol{\theta}}} p_{\boldsymbol{Z\Theta}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta},t)|\boldsymbol{J}|d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{\theta}$$

$$= \int_{D_{t_0}\times D_{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{Dp_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{Dt}|\boldsymbol{J}| + p_{\boldsymbol{Z\Theta}}\frac{D|\boldsymbol{J}|}{Dt}\right)d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{\theta}$$

- 其中

$$\frac{Dp_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{Dt} = \frac{\partial p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n_Z}\dot{z}_l\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial z_l}$$

$$\frac{D|\boldsymbol{J}|}{Dt} = \sum_{l=1}^{n_Z}\sum_{m=1}^{n_Z}\frac{\partial \dot{z}_l}{\partial Z_m}C_{lm} = \sum_{l=1}^{n_Z}\sum_{m=1}^{n_Z}\sum_{n=1}^{n_Z}\frac{\partial \dot{z}_l}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial Z_m}C_{lm} = |\boldsymbol{J}|\sum_{l=1}^{n_Z}\frac{\partial \dot{z}_l}{\partial z_l}$$

概率密度演化理论

- 代入概率守恒表达式

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{Dt}\int_{D_t\times D_{\boldsymbol{\theta}}} p_{\boldsymbol{Z\Theta}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta},t)\,d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{\theta}\\
&=\int_{D_{t_0}\times D_{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n_Z}\dot{z}_l\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial z_l}+p_{\boldsymbol{Z\Theta}}\sum_{l=1}^{n_Z}\frac{\partial \dot{z}_l}{\partial z_l}\right)|\boldsymbol{J}|\,d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{\theta}\\
&=\int_{D_t\times D_{\boldsymbol{\theta}}}\left(\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n_Z}\dot{z}_l\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial z_l}+p_{\boldsymbol{Z\Theta}}\sum_{l=1}^{n_Z}\frac{\partial \dot{z}_l}{\partial z_l}\right)d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{\theta}
\end{aligned}
$$

概率密度演化理论

- 此时若考虑完全欧拉描述，即

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{z}, t)$$

- 概率守恒方程化为

$$\begin{aligned}&\frac{D}{Dt}\int_{D_t \times D_{\boldsymbol{\theta}}} p_{\boldsymbol{Z\Theta}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}, t)\, d\boldsymbol{z} d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{D_t \times D_{\boldsymbol{\theta}}} \left(\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n_Z} \frac{\partial \dot{z}_l p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial z_l} \right) d\boldsymbol{z} d\boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

- 于是得刘维尔（Liouville）方程（耦合方程）

$$\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n_Z} \frac{\partial \dot{z}_l p_{\boldsymbol{Z\Theta}}}{\partial z_l} = 0$$

概率密度演化理论

- 此时若考虑拉格朗日描述，即

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\Theta}, t)$$

- 概率守恒方程化为

$$\frac{D}{Dt}\int_{D_t \times D_{\boldsymbol{\theta}}} p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}, t)\, d\boldsymbol{z} d\boldsymbol{\theta} = \int_{D_t \times D_{\boldsymbol{\theta}}} \left(\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n_Z} h_l \frac{\partial p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}}{\partial z_l} \right) d\boldsymbol{z} d\boldsymbol{\theta}$$

- 于是得广义密度演化方程（解耦方程）

$$\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n_Z} h_l \frac{\partial p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}}{\partial z_l} = 0$$

几点评论

- 概率守恒原理是概率密度演化方程的统一基础；
- 与经典的概率密度演化方程如 Liouville 方程、FPK 方程和 D-P 方程不同，广义概率密度演化方程的维数只取决于所需物理量的维数，而与本源随机动力系统的维数无关；
- 广义概率密度演化方程建立了确定性系统与随机系统的内在联系。这正是物理随机系统基本思想的体现；
- 和经典概率密度演化方程一样，广义概率密度演化方程不仅对线性系统适用，也对非线性系统成立。

广义密度演化方程的求解

Step 1. 概率空间选点与赋得概率的确定

- 在基本随机向量 $\boldsymbol{\Theta}$ 的分布空间 Ω_{Θ} 取得一系列代表性点

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}_q = (\theta_{q,1}, \theta_{q,2}, ..., \theta_{q,s}) \ , \ \ q = 1, 2, ..., n_{sel}$$

- 每个代表性点的赋得概率

$$P_q = \int_{V_q} p_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$$

- 离散代表点的选取方法请参阅李杰老师、陈建兵老师的文章。

Step 2. 确定性动力系统的求解

- 对于给定的 $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}_q, \ \ q = 1, 2, ..., n_{sel}$，求解 n_{sel} 次物理方程，获得对应的速度量 $\dot{z}(\boldsymbol{\theta}_q, t)$；
- 确定性动力系统的求解可以采用前述课程中介绍的相关方法。

广义密度演化方程的求解

Step 3. 广义密度演化方程的求解

- 广义密度演化方程及其初始条件

$$\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}_q,t)}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n_Z}\dot{z}_l(\boldsymbol{\theta}_q,t)\frac{\partial p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}_q,t)}{\partial z_l}=0\ ,\ \ q=1,2,...,n_{sel}$$

$$p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}_q,t)|_{t=t_0}=\delta(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0)P_q$$

- 将确定性系统分析得到的 $\dot{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\theta}_q,t)$ 代入广义密度演化方程，结合适当的数值求解方法，即可进行数值求解。

Step 4. 状态量的概率密度

- 采用下述全概率公式求状态量的概率密度

$$p_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z},t)=\int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}}p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta},t)d\boldsymbol{\theta}=\sum_{q=1}^{n_{sel}}p_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}_q,t)$$

有限差分方法

- 对于广义密度演化方程的求解，有限差分法是一类较好的方法。已有研究表明，有限差分法的计算表现极大地依赖于差分格式的选取。
- 概率密度演化分析中，要求差分给出的数值结果能确保概率密度的非负性；由于概率密度演化方程的系数有正负号变化，对于差分方向应该给予足够的注意。
- 以一维问题为例说明基于有限差分法的广义密度演化方程的求解过程，将方程简写为：

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + h\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

有限差分方法

- 先考虑 $h > 0$ 的情形。以 $p_{j,k}$ 表示 $p(z_j, \tau_k)$，用一阶差分代替一阶微分，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \tau} = \dfrac{p_{j,k} - p_{j,k-1}}{\Delta\tau} + o(\Delta\tau) \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{p_{j,k-1} - p_{j-1,k-1}}{\Delta z} + o(\Delta z) \end{cases}$$

- 代入原方程，略去高阶小量，有

$$p_{j,k} = \left(1 - hr_{_L}\right) p_{j,k-1} + hr_{_L} p_{j-1,k-1}$$

- 其中 $r_{_L} = \Delta\tau/\Delta z$ 为差分网格比。上述单边差分格式在时间和空间上均为一阶精度。

有限差分方法

- 不难证明

$$\sum_j p_{j,k} = \sum_j p_{j,k-1}$$

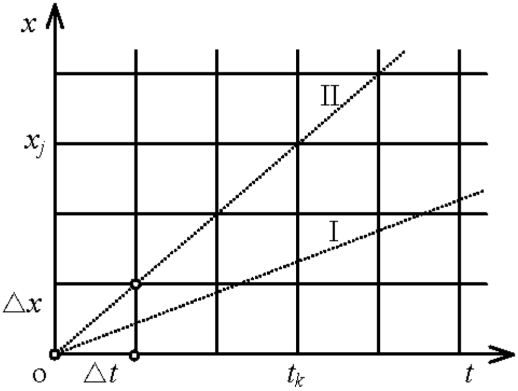
- 若 h 为常量，则有

$$\sum_j p_{j,k} z_j = x(\tau = 0) + h\tau_k$$

- 以初始概率集中于 $x(t = 0) = 0$ 的情况为例，此时离散化的初始条件为

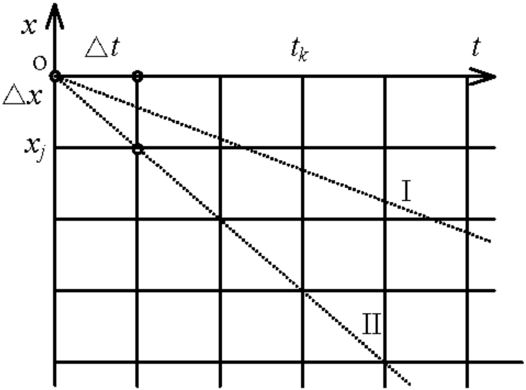
$$p_{j,0} = \frac{1}{\Delta z}\delta_{j,0}$$

有限差分方法



对于 $h > 0$ 的情况，为确保 $p_{0,1}, p_{1,1}$ 非零，必然要求$hr_L \leq 1$。

有限差分方法



对于 $h < 0$ 的情况，为确保 $p_{0,1}, p_{1,1}$ 非零，必然要求$-hr_L \leq 1$。

有限差分方法

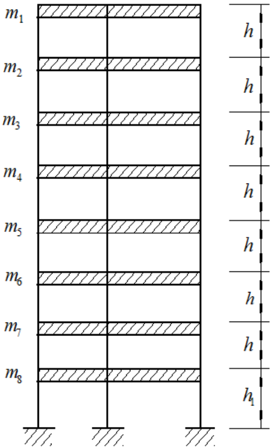
- 对于一般的 h，可以统一地将差分格式写为：

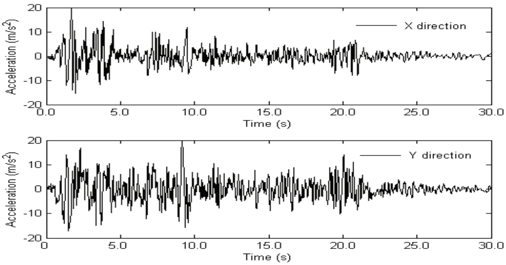
$$
\begin{aligned}
p_{j,k} = & \left(1 - |hr_{_L}|\right) p_{j,k-1} + \frac{1}{2}\left(hr_{_L} + |hr_{_L}|\right) p_{j-1,k-1} \\
& - \frac{1}{2}\left(hr_{_L} - |hr_{_L}|\right) p_{j+1,k-1}
\end{aligned}
$$

- 或者

$$
\begin{aligned}
p_{j,k} = & \left(1 + |hr_{_L}|\right) p_{j,k-1} \\
& + |hr_{_L}| \left\{ u(h) p_{j-1,k-1} + \left[1 - u(h)\right] p_{j+1,k+1} \right\}
\end{aligned}
$$

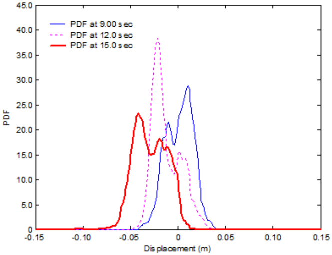
框架结构算例

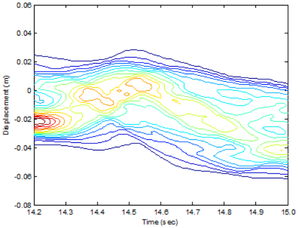


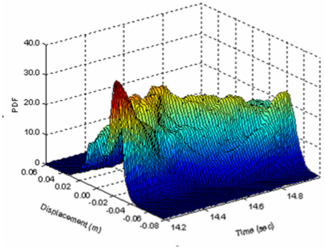


结构模型与地震动输入

框架结构算例

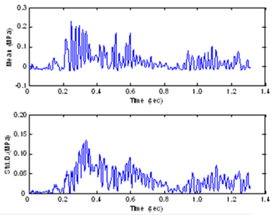

PDF at 9.00 sec
PDF at 12.0 sec
PDF at 15.0 sec
PDF
Displacement (m)


Displacement (m)
Time (sec)

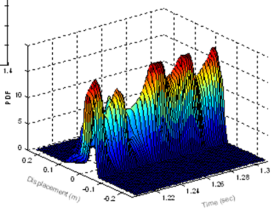

PDF
Displacement (m)
Time (sec)

混凝土大型蛋形消化池

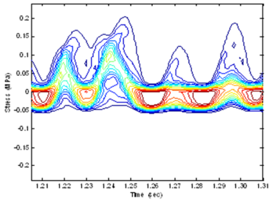
混凝土大型蛋形消化池



最大应力均值与标准差



概率密度函数曲面



等概率密度线

结束

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue