第二讲：应力应变分析

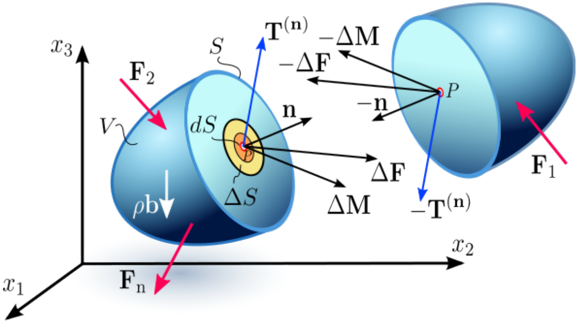
损伤力学基础研究生课程

任晓丹

同济大学建筑工程系

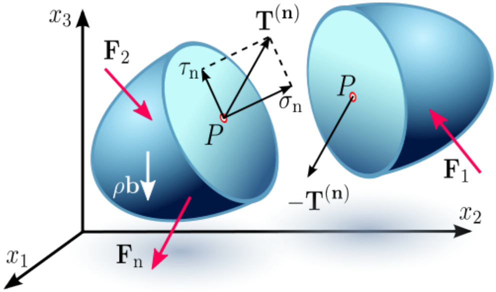
March 16, 2016

Euler–Cauchy 应力原理



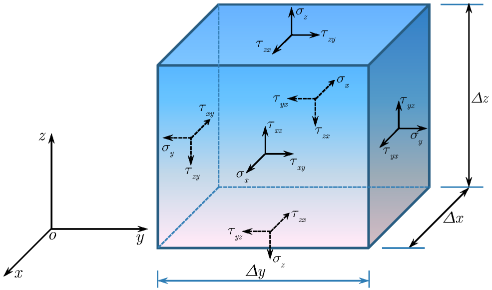
$$T_i^{(n)} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}S} \qquad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta M_i}{\Delta S} = 0$$

Euler–Cauchy 应力原理



$$\sigma_n = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}S} \qquad \tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F_s}{\mathrm{d}S}$$

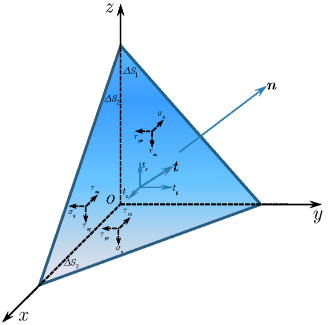
笛卡尔坐标系内的应力



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

由于剪应力的互等性，上述应力张量中的 9 个分量只有 6 个是彼此独立的，即：应力张量是二阶对称张量。

斜截面上的应力



$$\begin{cases} t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{cases}$$

写成张量形式

$$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$$

斜截面上的正应力和剪应力

$$\begin{cases} \sigma_n = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} = n_i \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j \\ \tau = \sqrt{\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t} - \sigma_n^2} \end{cases}$$

主应力

- 存在某斜截面，只有正应力分量而没有剪应力分量，此时正应力方向为截面法向，于是有 $\boldsymbol{t} = \sigma \boldsymbol{n}$。
- 结合斜截面应力公式 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$，得到应力特征方程

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma \boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad \left|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}\right| = 0$$

- 展开特征方程

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

- 特征方程有 3 个实根，即 3 个主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3。一般约定：$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$。进而可求得三个主方向，可以证明：当 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ 时，三个主应力方向相互垂直。特征方程的系数，即应力张量三个不变量的求法，请参照上节课的讨论以及教材或其它资料。

应力偏量

- 定义静水应力：

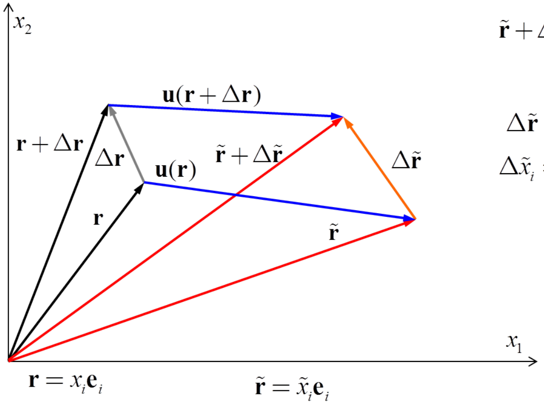
$$\sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

- 应力偏量定义为：

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$$

- 应力偏量表示纯剪应力状态，对于很多材料，是其重要的破坏控制机制，所以应力偏量应用十分广泛。
- J_1、J_2 和 J_3 分别称为应力偏张量的第一、第二、第三不变量。由于 $J_1 = 0$，因此，一点的应力状态也可以用 I_1、J_2 和 J_3 表示。

变形分析



$$\tilde{\mathbf{r}}+\Delta\tilde{\mathbf{r}}=\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{r}}=\Delta\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-\mathbf{u}(\mathbf{r})$$

$$\Delta\tilde{x}_i=\Delta x_i+u_i(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-u_i(\mathbf{r})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x}_i &\approx \Delta x_i+u_{i,j}\Delta x_j\\ &=(\delta_{ij}+u_{i,j})\Delta x_j\end{aligned}$$

格林应变与线性应变

考虑微段的长度变化

$$
\begin{aligned}
||\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}||^2 = \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\tilde{x}_i\mathrm{d}\tilde{x}_i &= \mathrm{d}x_j(\delta_{ij}+u_{i,j})(\delta_{ik}+u_{i,k})\mathrm{d}x_k \\
&= \mathrm{d}x_j(\delta_{jk}+u_{j,k}+u_{k,j}+u_{i,j}u_{i,k})\mathrm{d}x_k \\
&= \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\mathbf{1}+2\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

此处格林（Green）应变定义为

$$
\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(u_{j,k}+u_{k,j}+u_{i,j}u_{i,k})
$$

定义位移梯度的对称与反对称分量

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})
$$

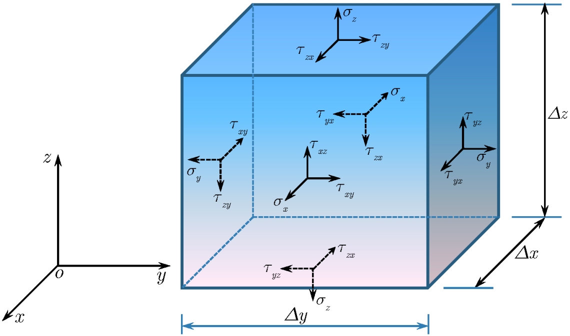
最终有如下表达式

$$
E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}-\varepsilon_{ik}\omega_{jk}-\omega_{ik}\varepsilon_{jk}+\omega_{ik}\omega_{jk})
$$

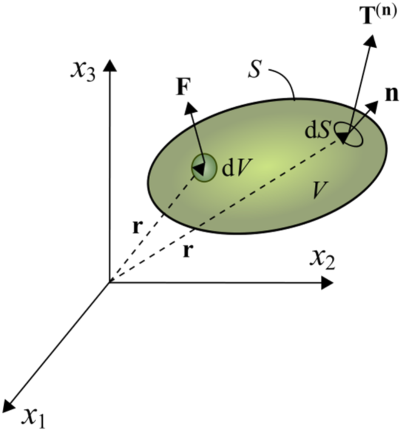
应变的分解与不变量

- 应变的球偏分解
- 体积应变
- 应变的不变量
- 与应力张量分析类似，均可利用二阶张量的相关结果，不再重复讲解

平衡方程


z
o
y
x
σ_z
τ_{zy}
τ_{zx}
σ_x
τ_{yx}
τ_{zx}
τ_{xy}
σ_y
τ_{zy}
τ_{xz}
τ_{xy}
σ_x
τ_{yz}
σ_y
τ_{yx}
τ_{zx}
τ_{yz}
σ_z
Δz
Δx
Δy

平衡方程



$$\oint_S \boldsymbol{T}^{(n)}\,\mathrm{d}S + \int_V \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = 0$$

因为 $\boldsymbol{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$，并使用散度定理，有

$$\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V = 0$$

上式对任意体积 V 均成立，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F} = 0$$

协调条件

$u_i \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$

ε_{ij} plus Compatibility $\Rightarrow u_i$

$\Downarrow$

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

弹性本构关系

- 线弹性本构关系

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \ , \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$$

- 刚度张量的对称性
  - 次对称性

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}$$

  - 主对称性

$$E_{ijkl} = E_{klij}$$

弹性本构关系

- Voight notation

$$
\begin{array}{c|c|cccccc}
s_\alpha & \alpha & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
\multirow{2}{*}{s_{ij}} & i & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\
 & j & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3
\end{array}
$$

- 刚度张量矩阵化

$$
[E]=\begin{bmatrix}
E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\
E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\
E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\
E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\
E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\
E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66}
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\
E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\
E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3323} \\
E_{1211} & E_{1222} & E_{1213} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\
E_{1311} & E_{1322} & E_{1333} & E_{1312} & E_{1313} & E_{1323} \\
E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2312} & E_{2313} & E_{2323}
\end{bmatrix}
$$

弹性本构关系

正交各向异性 (Orthotropy)

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}$$

弹性本构关系

各向同性 (Isotropy)

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

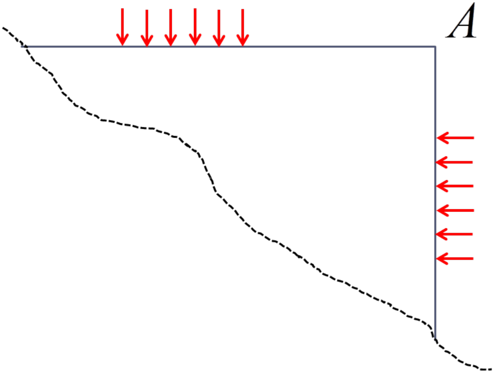
$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{kk} = 2K\varepsilon_{kk}\ ,\quad s_{ij} = 2\mu e_{ij}$$

$$W = \frac{1}{2}K(\varepsilon_{kk})^2 + \mu e_{ij}e_{ij}$$

作业题 1

证明：如图所示角点 A 的应力为 0（无外力作用在角点上）



作业题 2

已知：1）应变位移关系

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

2）应力平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

求证：

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV - \int_V b_i \delta u_i dV - \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = 0$$

公共邮箱

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue