第四讲：损伤力学基本原理

损伤力学基础研究生课程

任晓丹

同济大学建筑工程系

April 18, 2016

本节主要内容

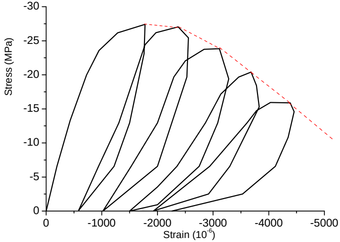
1. 混凝土的基本非线性特性
2. 损伤与损伤变量
3. 不可逆热力学基本原理
    - 热力学第一定律
    - 热力学第二定律

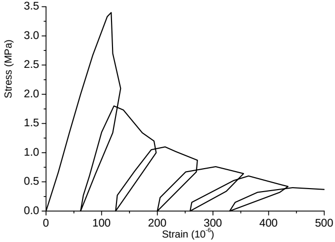
参考文献

- Krajcinovic D. Damage Mechanics. Elsevier, 2003.
- Lemaitre J. A course on Damage Mechanics. Springer-verlag, 1996.
- 王自强编著. 理性力学基础. 北京：科学出版社，2000.
- Ju, J. W., On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. International Journal of Solids Structures, 1989, 25(7), 803-833.

混凝土的基本非线性特性

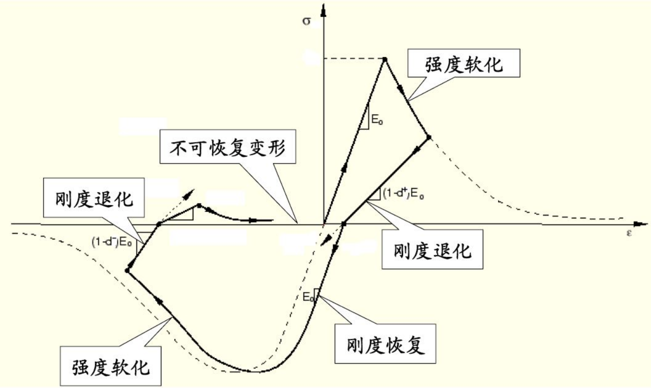
- 单轴重复加载实验结果





混凝土的基本非线性特性

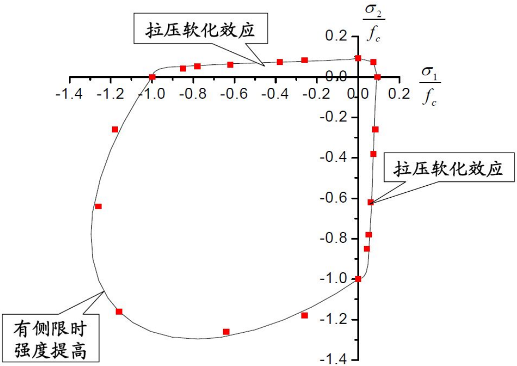
- 单轴加载分析



强度软化、刚度退化、单边效应、残余应变

混凝土的基本非线性特性

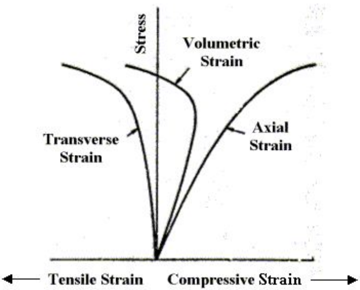
- 双轴实验结果与分析



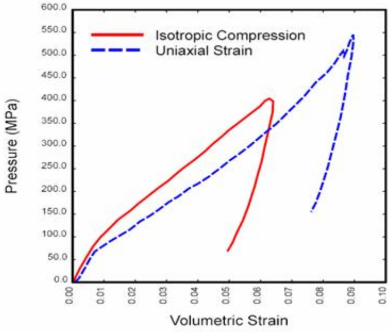
拉压软化、侧限强化

混凝土的基本非线性特性

- 三轴实验结果与分析



单轴受压实验

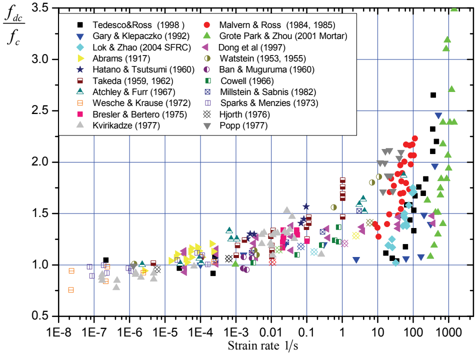


约束受压实验

体积膨胀、约束强化

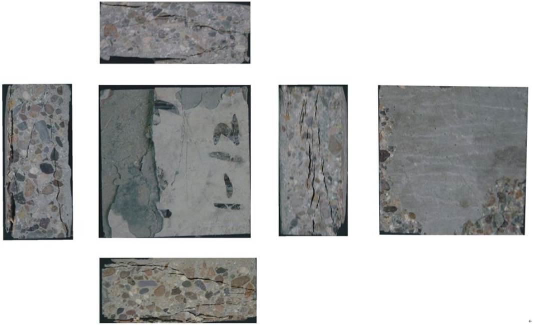
混凝土的基本非线性特性

- 动力加载实验结果与分析



应变率强化

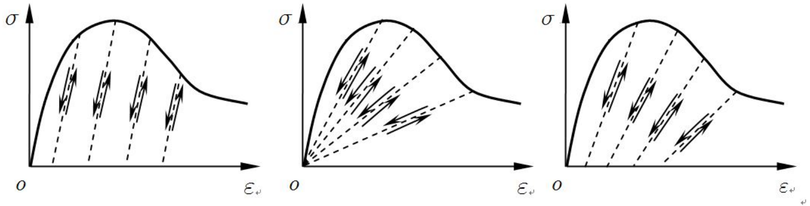
混凝土的破坏模式



受压破坏

受拉破坏

混凝土的宏观力学性质



软化 + 理想弹塑性　　弹性损伤　　弹塑性损伤

真实材料的变形性质（如混凝土材料），往往是既有刚度退化，又有塑性变形。表现在细观物理机制上，则是既存在微裂缝、微缺陷的扩展，又存在与具体材料变形细观机理相联系的滑移与流动。因此，正确的受力本构关系应反映弹性损伤和塑性变形两种机制。

损伤与损伤力学

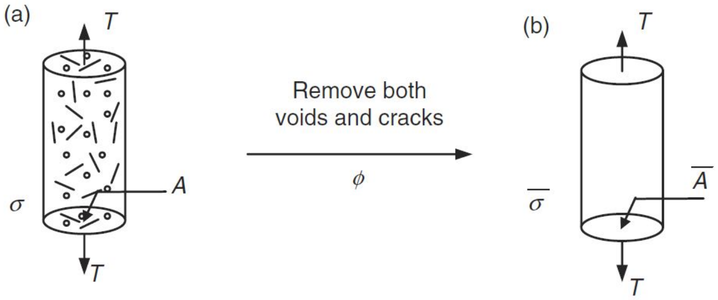
工程材料在制造过程中，会在其内部产生各种微缺陷，在其作为结构材料使用过程中，这些微缺陷会在各种外部作用下进一步扩大或发展，从而导致材料与结构宏观力学性质的劣化。

- 在细观结构水平上，材料的缺陷（如微裂缝、微孔洞等）被称为损伤；
- 在外力作用下，材料内部缺陷的扩展称为损伤演化；
- 从宏观连续介质力学的观点考察，损伤可以被认为是材料内部微细结构状态的一种 不可逆的、耗能的演化过程。
- 损伤力学主要研究工程材料由于内部微观缺陷的产生和发展所引起的宏观力学效应及其最终导致材料或结构破坏的过程和规律；
- 损伤力学利用物理学、连续介质力学的基本原理，通过引入损伤变量这种内部状态量来描述材料的损伤状态及含损伤结构的力学效应。

损伤变量

- 损伤变量是损伤力学中最基本的概念，它是用于反映材料内部缺陷状态的一个物理量;
- 可以通过对材料微结构的物理分析（如空隙长度、面积、体积、形状、排列方式等）选择并确定损伤变量，也可以依据对表观物理量（如密度、弹性常数、超声波波速、电阻等）的间接测量 来选择并确定损伤变量;
- 与其将损伤变量定义为联系于某一可观测现象的具体物理量，毋宁把损伤变量定义为一类反映材料宏观性质劣化的内变量；
- 在现象学层面上，没有必要对损伤变量给出具象的解释，仅在细观力学研究中，这种解释才是必要的。

损伤变量



$$d = \frac{A - \overline{A}}{A}, \qquad \overline{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d}$$

损伤变量

两类基本假定：

- 应变等效假定
  损伤材料的应变 ε 与未损伤材料的应变 $\bar{\varepsilon}$ 等价
  （未损伤面积上的材料仍服从无损伤材料的应力 -应变关系）
- 能量等效假定
  损伤材料的应变能 ψ 与未损伤材料的应变能 $\overline{\psi}$ 等价

损伤变量

对于损伤材料，有

$$\sigma = E\varepsilon$$

对于无损材料，有

$$\overline{\sigma} = E_0\overline{\varepsilon}$$

根据应变等效假定，有

$$\varepsilon = \overline{\varepsilon}$$

比较上式子，并考虑 σ 与 $\overline{\sigma}$ 的换算关系，有

$$d = \frac{E_0 - E}{E_0}$$

基于应变等效假定构造的损伤表达式，由于其应用较为简洁，物理意义较为明确，本课程后续所讨论的模型大都基于此体系。

损伤变量

对于损伤材料，有

$$\psi = \frac{\sigma^2}{2E}$$

对于无损材料，有

$$\overline{\psi} = \frac{\overline{\sigma}^2}{2E_0}$$

根据应变能等效假定，有：$\psi = \overline{\psi}$
比较上式子，并考虑 σ 与 $\overline{\sigma}$ 的换算关系，有

$$d = \frac{\sqrt{E_0} - \sqrt{E}}{\sqrt{E_0}}$$

基于应变能等效假定构造的损伤表达式，其形式较为复杂，但是对于损伤张量的情形，可得到对称的损伤后弹性刚度张量，所以在一定范围内应用也较多。

本构关系与不可逆热力学

- 材料的非线性发展过程是一个不可逆过程，须服从不可逆热力学的相关定律，籍此可建立材料非线性演化的某些表达形式；
- 本构关系建模过程中多重非线性机制（塑性和损伤等）的考虑，借助能量标量将变得十分简便；
- 不可逆热力学只能给出本构关系须满足的某些约束条件和表达形式，不能完全确定非线性演化的函数或方程；
- 对于含内变量的不可逆热力学理论，内变量被考虑为能够宏观地表征材料内部组织状态不可逆变化的某种内部变量，而材料对荷载历史的记忆性可以通过内变量的取值来确定。

能量守恒原理

$$\dot{K} + \dot{E} = W + q$$

动能

$$K = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \rho \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} d\Omega$$

内能

$$E = \int_{\Omega} \rho e d\Omega$$

外力功率

$$W = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{b} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS$$

内能变化率

$$q = \frac{dQ}{dt} = \int_{\Omega} \rho\gamma d\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

能量守恒原理

- 动能变化率

$$\begin{aligned}\dot{K} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}d\Omega\right) = \int_\Omega \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}d\Omega \\ &= \int_\Omega \dot{\boldsymbol{u}}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b})d\Omega = \int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}d\Omega + \int_\Omega \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{b}d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}dS - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:(\nabla\dot{\boldsymbol{u}})d\Omega + \int_\Omega \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{b}d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{t}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}dS - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}d\Omega + \int_\Omega \rho\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{b}d\Omega\end{aligned}$$

- 代入能量守恒定律，可得局部（微分）形式的热力学第一定律

$$\rho\dot{e} = \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho\gamma - \nabla\cdot\boldsymbol{h}$$

熵原理 (wikipedia)

Entropy is a thermodynamic property that is the measure of a system's thermal energy per unit temperature that is unavailable for doing useful work.

- isolated system（与外界没有热量和物质交换）

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S}_i \quad \text{with} \quad \dot{S}_i \geq 0 \Rightarrow \frac{dS}{dt} \geq 0$$

- closed system（与外界只有热量交换、没有物质交换）

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \quad \text{with} \quad \dot{S}_i \geq 0 \Rightarrow \frac{dS}{dt} \geq \frac{\dot{Q}}{T}$$

- open system（与外界有热量和物质交换）

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S} + \dot{S}_i \quad \text{with} \quad \dot{S}_i \geq 0 \Rightarrow \frac{dS}{dt} \geq \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}$$

熵原理

考虑闭合系统（closed system），热力学第二定律表示为

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{\dot{Q}}{T}$$

此式称为 Clausius-Duhem 不等式，其积分形式为

$$\int_{\Omega} \rho \dot{s} d\Omega \geq \int_{\Omega} \frac{\rho\gamma}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}}{T} dS$$

上式第二项用散度定理，有

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}}{T} dS = \int_{\Omega} \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{h}}{T} d\Omega - \frac{\boldsymbol{h}}{T^2}\cdot\nabla T\right) d\Omega$$

熵原理

利用上述结果整理 Clausius-Duhem 不等式的积分形式，有

$$\int_\Omega \left(\rho \dot{s} - \frac{\rho\gamma}{T} + \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{h}}{T} - \frac{\boldsymbol{h}}{T^2}\cdot\nabla T \right) d\Omega \geq 0$$

上式对于任意体积均成立，去除积分号并整理，得

$$\rho T \dot{s} - \frac{\boldsymbol{h}}{T}\cdot\nabla T - (\rho\gamma - \nabla\cdot\boldsymbol{h}) \geq 0$$

利用热力学第一定律，有

$$\rho T \dot{s} - \frac{\boldsymbol{h}}{T}\cdot\nabla T - (\rho\dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq 0$$

熵原理

进一步整理，得

$$\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\rho(\dot{e}-T\dot{s})-\frac{\boldsymbol{h}}{T}\cdot\nabla T\geq 0$$

对于常见力学过程，不考虑温度梯度对材料行为的影响，上式简化为

$$\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\rho(\dot{e}-T\dot{s})\geq 0$$

考虑上式第二项的表达形式，定义自由能密度（物理意义？）

$$\psi=\rho e-T\rho s$$

Clausius-Duhem 不等式最终化为

$$\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\psi}\geq 0$$

熵原理

上述 ψ 一般称为 Helmholtz 自由能。对于等温纯力学过程，另一种常用的自由能是 Gibbs 自由能 $\bar{\psi}$，它与 Helmholtz 自由能的关系为

$$\bar{\psi} + \psi = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

进而得 Clausius-Duhem 不等式的另一种形式

$$\bar{\psi} - \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$$

弹性损伤本构关系示例

Helmholtz 自由能

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$$

对于无损材料

$$\psi_0 = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d = 0) = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$$

对于有损材料

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) < \psi_0$$

考虑应变等效假定

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(1 - d)\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = (1 - d)\psi_0$$

弹性损伤本构关系示例

将 Helmholtz 自由能代入 Clausius-Duhem 不等式，得

$$\left(\boldsymbol{\sigma}-\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{\partial\psi}{\partial d}\dot{d}\geq 0$$

由于 $\dot{\varepsilon}$ 的任意性，可得下述等式和不等式

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\ ,\quad -\frac{\partial\psi}{\partial d}\dot{d}\geq 0$$

对于等式，可得损伤本构关系

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}=(1-d)\bar{\boldsymbol{\sigma}}=(1-d)\mathbb{E}_0:\boldsymbol{\varepsilon}$$

结束

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue