单标量损伤本构关系
损伤力学基础研究生课程之五

任晓丹

同济大学建筑工程系

April 18, 2016

本节主要内容

1. 弹性单标量损伤本构关系
2. 弹塑性单标量损伤本构关系

参考文献

- Ju, J. W., On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. International Journal of Solids Structures, 1989, 25(7), 803-833.
- 冯西桥，余寿文. 损伤力学. 清华大学出版社.

理论起点

Clausius-Duhem 不等式:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} \geq 0$$

弹性损伤本构关系

Helmholtz 自由能

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$$

对于无损材料

$$\psi_0 = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d = 0) = \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$$

对于有损材料

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) < \psi_0$$

考虑应变等效假定

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(1-d)\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = (1-d)\psi_0$$

弹性损伤本构关系

将 Helmholtz 自由能代入 Clausius-Duhem 不等式，得

$$\left(\boldsymbol{\sigma}-\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{\partial \psi}{\partial d}\dot{d} \geq 0$$

由于 $\dot{\varepsilon}$ 的任意性，可得下述等式和不等式

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\ , \quad -\frac{\partial \psi}{\partial d}\dot{d} \geq 0$$

对于等式，可得损伤本构关系

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}=(1-d)\overline{\boldsymbol{\sigma}}=(1-d)\mathbb{E}_0:\boldsymbol{\varepsilon}$$

弹性损伤本构关系

对于不等式，令损伤能释放率 $Y=-\frac{\partial\psi}{\partial d}=\psi_0$，化为

$$Y\dot{d}\geq 0$$

表示损伤耗能始终不小于 0。类比于塑性力学，引入损伤一致性条件

$$G(Y,d)=0$$

在此约束条件下考虑损伤耗能取极值，采用 Lagrange 乘子法，有

$$\dot{d}=\dot{\lambda}\frac{\partial G}{\partial Y}$$

Kuhn-Tucker 条件

$$G\leq 0,\ \ \dot{\lambda}\geq 0,\ \ \dot{\lambda}\dot{G}=0$$

弹性损伤本构关系

考虑一致性条件

$$\dot{G}(Y, d) = \frac{\partial G}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial G}{\partial d}\dot{d} = 0$$

将损伤演化率表达式代入，得

$$\frac{\partial G}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial G}{\partial d}\dot{\lambda}\frac{\partial G}{\partial Y} = 0$$

得

$$\dot{\lambda} = -\frac{\dot{Y}}{\partial G/\partial d} \qquad \dot{d} = -\frac{\partial G/\partial Y}{\partial G/\partial d}\dot{Y} := g'(Y)\,\dot{Y}$$

考虑损伤能释放率的表达式，代入上面第二式，得

$$\dot{d} = g'\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

弹性损伤本构关系

下面求切线刚度张量:
对损伤本构关系求微分

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d)\mathbb{E}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{d}\,\mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$$

代入前述损伤对时间微分的表达式，得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1 - d)\mathbb{E}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - g^{\prime}(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0) \otimes (\mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \left[(1 - d)\mathbb{E}_0 - g^{\prime}(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0) \otimes (\mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon})\right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}$$

考虑损伤的切线刚度张量

$$\mathbb{E}^{tan} = (1 - d)\mathbb{E}_0 - g^{\prime}(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0) \otimes (\mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon})$$

弹塑性损伤本构关系

类比于应变的弹塑性分解，首先引入 Helmholtz 自由能的弹塑性分解

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, d) + \psi^p(\boldsymbol{\kappa}, d)$$

对于弹性 Helmholtz 自由能 ψ^e，可类比采用前述弹性损伤模型建立的表达式，有

$$\psi^e = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, d) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}(1-d)\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e = (1-d)\psi_0$$

对于无损材料

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

弹塑性损伤本构关系

将弹塑性 Helmholtz 自由能代入 Clausius-Duhem 不等式，得

$$\left(\boldsymbol{\sigma}-\frac{\partial\psi^e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e+\left(\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\frac{\partial\psi^p}{\partial\boldsymbol{\kappa}}\cdot\dot{\boldsymbol{\kappa}}\right)-\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial d}+\frac{\partial\psi^p}{\partial d}\right)\dot{d}\geq 0$$

可得一个等式和两个不等式

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial\psi^e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\frac{\partial\psi^p}{\partial\boldsymbol{\kappa}}\cdot\dot{\boldsymbol{\kappa}}\geq 0$$

$$-\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial d}+\frac{\partial\psi^p}{\partial d}\right)\dot{d}\geq 0$$

弹塑性损伤本构关系

对于等式

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

考虑弹性 Helmholtz 自由能相关表达式

$$\psi^e = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, d) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}(1-d)\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e = (1-d)\psi_0$$

得弹塑性损伤本构关系

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\overline{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

弹塑性损伤本构关系

对于塑性耗散不等式

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0$$

为了将塑性演化与损伤解耦，考虑塑性 Helmholtz 自由能表示为 $\psi^p = (1-d)\psi_0^p$，上述塑性耗散不等式化为

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi_0^p}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \triangleq \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0$$

基于上述塑性耗散不等式，可以在有效应力空间 $\{\overline{\boldsymbol{\sigma}}\}$ 构造塑性理论，称为有效应力空间塑性力学。由于其在计算塑性演化时不必考虑损伤的影响，同时又能够与损伤理论很好的结合，所以在弹塑性损伤理论中得到了广泛的应用。

弹塑性损伤本构关系

对于塑性耗散

$$W = \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}$$

取极值，约束条件为屈服条件如下

$$f(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{q}) = 0$$

用拉格朗日乘子法构造复合函数

$$\Pi = \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\lambda} f(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{q})$$

求偏导可得相关流动法则

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} \;,\; \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}$$

Kuhn-Tucker 条件

$$f \leq 0, \;\; \dot{\lambda} \geq 0, \;\; \dot{\lambda} \dot{f} = 0$$

弹塑性损伤本构关系

对于损伤耗散

$$-\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial d}+\frac{\partial\psi^p}{\partial d}\right)\dot{d}\geq 0$$

定义损伤能释放率

$$Y=-\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial d}+\frac{\partial\psi^p}{\partial d}\right)=\psi_0^e+\psi_0^p$$

类比于塑性力学，引入损伤一致性条件

$$G(Y,d)=0$$

考虑约束条件下损伤耗能的极值，采用 Lagrange 乘子法，有

$$\dot{d}=\dot{\lambda}\frac{\partial G}{\partial Y}$$

Kuhn-Tucker 条件：$G\leq 0,\ \ \dot{\lambda}\geq 0,\ \ \dot{\lambda}\dot{G}=0$

弹塑性损伤本构关系

如何求解ψ_0^p，目前的研究并未给出较好的解决方案。

- Lee and Fenves (1998)

$$\psi_0^p = \int_0^{+\infty} \sigma_t(\varepsilon^p)\, d\varepsilon^p + \int_0^{+\infty} \sigma_c(\varepsilon^p)\, d\varepsilon^p - \int_0^{\kappa_t} c_t(\kappa)\, d\kappa - \int_0^{\kappa_c} c_c(\kappa)\, d\kappa$$

- Voyiadjis and coworkers (2003, 2004, 2007)

$$\psi_0^p = f_0^+ \varepsilon_{ep}^+ + \frac{1}{2} f(\varepsilon_{ep}^+)^2 + f_0^- \varepsilon_{ep}^- + Q\left[\varepsilon_{ep}^- + \frac{1}{b}\exp(-b\varepsilon_{ep}^-)\right]$$

- Ju (1989)

$$\psi_0^p = \int_0^{\varepsilon^p} \overline{\sigma} : d\varepsilon^p$$

弹塑性损伤本构关系

考虑一致性条件

$$\dot{G}(Y, d) = \frac{\partial G}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial G}{\partial d}\dot{d} = 0$$

将损伤演化率表达式代入，得

$$\frac{\partial G}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial G}{\partial d}\dot{\lambda}\frac{\partial G}{\partial Y} = 0$$

得

$$\dot{\lambda} = -\frac{\dot{Y}}{\partial G/\partial d} \qquad \dot{d} = -\frac{\partial G/\partial Y}{\partial G/\partial d}\dot{Y} := g'(Y)\dot{Y} = g'\frac{\partial Y}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$$

弹塑性损伤本构关系

下面求切线刚度张量。
考虑弹塑性损伤本构关系的微分

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}}$$

将损伤率表达式代入，有

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} - g'\left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\boldsymbol{I} - d\boldsymbol{I} - g'\frac{\partial Y}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}}\right) : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$$

又

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbb{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

所以

$$\mathbb{E}^{tan} = \left(\boldsymbol{I} - d\boldsymbol{I} - g'\frac{\partial Y}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}}\right) : \mathbb{E}^{ep}$$

单标量损伤本构关系的局限性

1. Too simple!
2. Sometimes naive!
3. 仍具有理论和现实意义。

建立弹塑性损伤本构关系的一般步骤

1. 根据实际的物理损伤机制选定合理的损伤变量，定义材料的弹性自由能和塑性自由能，并得到材料的总 Helmholtz 自由能；
2. 基于连续介质不可逆热力学基本原理，根据弹性 Helmholtz 自由能得到含内变量的材料应力 - 应变本构关系；根据总 Helmholtz 自由能得到损伤能释放率的表达式；
3. 基于损伤能释放率建立损伤准则，根据正交流动法则确定损伤变量的演化法则；
4. 在有效应力空间内确定塑性变形及其演化规律。

结束

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue