混凝土双标量损伤本构关系

损伤力学基础研究生课程之六、七

任晓丹

同济大学建筑工程系

May 19, 2017

本节主要内容

参考文献

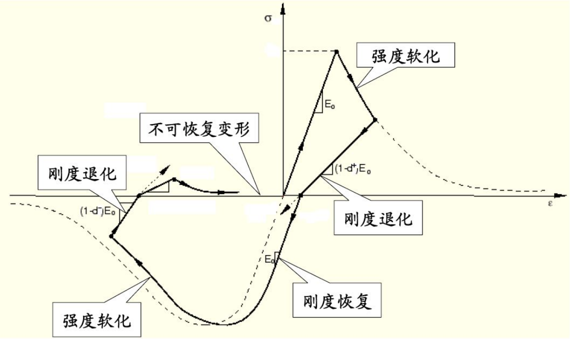
- Ju, J.W. (1989). On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. International Journal of Solids Structures, 25(7): 803-833.
- Faria, R., Oliver, J. and Cervera, M. (1998). A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. International Journal of Solids Structures. 35(14): 1533-1558.
- Lee, J. and Fenves, G.L. (1998). Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. ASCE. Journal of Engineering Mechanics Division. 124: 892-900.
- Wu, J.Y., Li, J. and Faria, R. (2006). An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures. 43(3-4): 583-612.
- 李杰, 任晓丹. (2010). 混凝土静力与动力损伤本构模型研究进展述评. 力学进展. 40(3): 284-297.

混凝土非线性特性的考虑

除了考虑损伤引起的软化和塑性引起的残余应变之外，还需要考虑至少两方面的特性。单边效应：材料在拉、压应力作用下的不同特性以及荷载反向后裂缝闭合所导致的混凝土刚度恢复。

混凝土非线性特性的考虑

除了考虑损伤引起的软化和塑性引起的残余应变之外，还需要考虑至少两方面的特性。单边效应：材料在拉、压应力作用下的不同特性以及荷载反向后裂缝闭合所导致的混凝土刚度恢复。

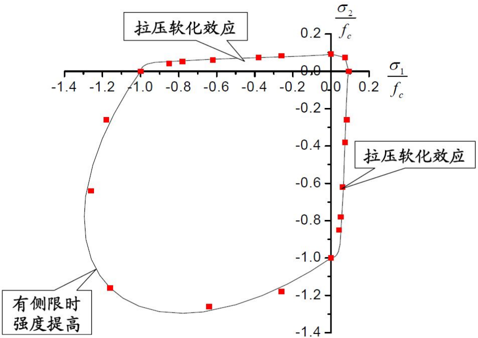


混凝土非线性特性的考虑

除了考虑损伤引起的软化和塑性引起的残余应变之外，还需要考虑至少两方面的特性。强化效应与拉压软化效应：多轴受压时的抗压强度提高和多轴拉、压应力状态下的强度降低。

混凝土非线性特性的考虑

除了考虑损伤引起的软化和塑性引起的残余应变之外，还需要考虑至少两方面的特性。强化效应与拉压软化效应：多轴受压时的抗压强度提高和多轴拉、压应力状态下的强度降低。



混凝土的损伤机制

大量的混凝土多轴受力试验表明，混凝土的损伤破坏形态一般可概括为三种：受拉损伤破坏、受剪损伤破坏以及高静水压力下的压碎破坏。受拉损伤破坏面由拉开型裂缝发展形成；受剪损伤破坏面由拉开型和滑移型裂缝发展形成；而压碎性破坏则是在高静水压力（三向等压）作用下混凝土材料组份破碎或者大量的剪切型裂缝贯通构成。

混凝土的损伤机制

若不考虑高静水压力作用下的压碎性破坏，则可以认为：混凝土材料的损伤和破坏源于两种基本的物理机制，受拉损伤机制和受剪损伤机制。受拉损伤机制代表了混凝土材料各相组分之间的受拉分离。经典的最大拉应力（拉应变）断裂准则即认为材料破坏是由于受拉损伤机制所致。受剪损伤机制则代表了混凝土材料各相组分之间内粘接力的破坏。

- 在受拉为主的应力状态下（如单轴受拉、双轴受拉等）、球量空间内，混凝土损伤由受拉损伤机制控制，采用受拉损伤变量d^+描述。
- 在受压为主的应力状态下（如单轴受压、双轴受压等），由于在偏量空间内不存在拉应力，混凝土损伤由受剪损伤机制控制，采用受拉损伤变量d^-描述。

同时考虑 d^+ 和 d^- 所建立的损伤模型称为双标量损伤模型。由于其较为全面地描述了混凝土的非线性特性，所以目前此类模型已成为混凝土非线性分析所采用的标准模型，且对应的简化模型已写入《混凝土结构设计规范》（GB50010-2010）。

混凝土的损伤机制

若不考虑高静水压力作用下的压碎性破坏，则可以认为：混凝土材料的损伤和破坏源于两种基本的物理机制，受拉损伤机制和受剪损伤机制。受拉损伤机制代表了混凝土材料各相组分之间的受拉分离。经典的最大拉应力（拉应变）断裂准则即认为材料破坏是由于受拉损伤机制所致。受剪损伤机制则代表了混凝土材料各相组分之间内粘接力的破坏。

- 在受拉为主的应力状态下（如单轴受拉、双轴受拉等）、球量空间内，混凝土损伤由受拉损伤机制控制，采用受拉损伤变量d^+描述。
- 在受压为主的应力状态下（如单轴受压、双轴受压等），由于在偏量空间内不存在拉应力，混凝土损伤由受剪损伤机制控制，采用受拉损伤变量d^-描述。

同时考虑 d^+ 和 d^- 所建立的损伤模型称为双标量损伤模型。由于其较为全面地描述了混凝土的非线性特性，所以目前此类模型已成为混凝土非线性分析所采用的标准模型，且对应的简化模型已写入《混凝土结构设计规范》（GB50010-2010）。

混凝土的损伤机制

若不考虑高静水压力作用下的压碎性破坏，则可以认为：混凝土材料的损伤和破坏源于两种基本的物理机制，受拉损伤机制和受剪损伤机制。受拉损伤机制代表了混凝土材料各相组分之间的受拉分离。经典的最大拉应力（拉应变）断裂准则即认为材料破坏是由于受拉损伤机制所致。受剪损伤机制则代表了混凝土材料各相组分之间内粘接力的破坏。

- 在受拉为主的应力状态下（如单轴受拉、双轴受拉等）、球量空间内，混凝土损伤由受拉损伤机制控制，采用受拉损伤变量d^+描述。
- 在受压为主的应力状态下（如单轴受压、双轴受压等），由于在偏量空间内不存在拉应力，混凝土损伤由受剪损伤机制控制, 采用受拉损伤变量d^-描述。

同时考虑 d^+ 和 d^- 所建立的损伤模型称为双标量损伤模型。由于其较为全面地描述了混凝土的非线性特性，所以目前此类模型已成为混凝土非线性分析所采用的标准模型，且对应的简化模型已写入《混凝土结构设计规范》（GB50010-2010）。

背景

- 确定受拉损伤与受剪损伤所对应的应力状态，是双标量损伤建模的基础；
- 早期的研究首先将应力张量分解为正、负两个部分，对应于两个损伤标量建立损伤模型；
- 随着研究的深入和有效应力理论的引入，后续的研究将有效应力分解为正负两个部分，所得模型具有更好的稳定性和计算精度；
- 有效应力的正负分解是混凝土损伤力学对于连续损伤力学理论体系的重要贡献。

有效应力正负分解

考虑有效应力分解为正、负两个分量，分别代表受拉、受压应力状态，有

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{+} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{-}$$

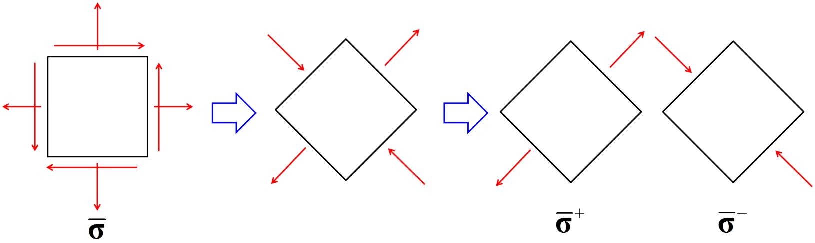
为了分别考虑拉应力和压应力的作用，考虑如下基于主应力空间的分解：

有效应力正负分解

考虑有效应力分解为正、负两个分量，分别代表受拉、受压应力状态，有

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{+} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{-}$$

为了分别考虑拉应力和压应力的作用，考虑如下基于主应力空间的分解：



有效应力正负分解

有效应力的特征方程

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} = \hat{\bar{\sigma}}_a \boldsymbol{n}^{(a)}$$

其中 $\hat{\bar{\sigma}}_a$ 和 $\boldsymbol{n}^{(a)}$ 分别是有效应力的第 a 阶特征值和特征向量 $(a = 1, 2, 3)$。考虑所有的特征方程，有

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[\boldsymbol{n}^{(1)}, \boldsymbol{n}^{(2)}, \boldsymbol{n}^{(3)}\right] = \left[\boldsymbol{n}^{(1)}, \boldsymbol{n}^{(2)}, \boldsymbol{n}^{(3)}\right] diag(\hat{\bar{\sigma}}_1, \hat{\bar{\sigma}}_2, \hat{\bar{\sigma}}_3)$$

由特征向量的正交性，有

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \left[\boldsymbol{n}^{(1)}, \boldsymbol{n}^{(2)}, \boldsymbol{n}^{(3)}\right] \mathrm{diag}(\hat{\bar{\sigma}}_1, \hat{\bar{\sigma}}_2, \hat{\bar{\sigma}}_3) \left[\boldsymbol{n}^{(1)}, \boldsymbol{n}^{(2)}, \boldsymbol{n}^{(3)}\right]^T \\ &= \sum_a \boldsymbol{n}^{(a)} \hat{\bar{\sigma}}_a \left[\boldsymbol{n}^{(a)}\right]^T = \sum_a \hat{\bar{\sigma}}_a \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \end{aligned}$$

以上我们建立了有效应力特征分解的基本表达式，基于此可以较为容易地进行正、负分解。

有效应力正负分解

定义 Macaulay 括号如下：

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

那么有效应力的正、负分量定义为

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{+} = \sum_{a} \langle \hat{\overline{\sigma}}_{a} \rangle \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{-} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{+}$$

有效应力正负分解

为了便于后续表达式的建立，进一步定义 Heaviside 函数

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

那么有效应力的正、负分量定义为

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{+} = \sum_{a} \mathrm{H}(\hat{\overline{\sigma}}_a)\hat{\overline{\sigma}}_a \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{-} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{+}$$

有效应力正负分解

由特征值的性质

$$\hat{\bar{\sigma}}_a = \boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} = (\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

代入有效应力正分量表达式

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ &= \sum_a \mathrm{H}(\hat{\bar{\sigma}}_a)\hat{\bar{\sigma}}_a \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \\
&= \sum_a \mathrm{H}(\hat{\bar{\sigma}}_a)\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} (\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\
&= \left(\sum_a \mathrm{H}(\hat{\bar{\sigma}}_a)\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \right) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}
\end{aligned}$$

有效应力正负分解

定义四阶投影张量

$$\mathbb{P}^{+} = \sum_{a} \mathrm{H}(\hat{\bar{\sigma}}_a)\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \ , \quad \mathbb{P}^{-} = \mathbb{I} - \mathbb{P}^{+}$$

有效应力正、负分量表示为:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{+} = \mathbb{P}^{+} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \ , \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{-} = \mathbb{P}^{-} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

有效应力率分解

由于 $\mathbb{P}^+$ 与 $\mathbb{P}^-$ 的非线性特性，不能直接求有效应力正、负分量的率表达式

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^+ \neq \mathbb{P}^+ : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^- \neq \mathbb{P}^- : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$$

定义有效应力率投影张量

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^+ = \mathbb{Q}^+ : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^- = \mathbb{Q}^- : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$$

要求解率投影算子 $\mathbb{Q}^+$ 和 $\mathbb{Q}^-$，需要考虑所谓特征值摄动问题：给定有效应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 及其对应的特征值 $\hat{\bar{\sigma}}_a$ 和特征向量 $\boldsymbol{n}^{(a)}$，对于有效应力微分 $\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}}$，求解特征值微分 $\mathrm{d}\hat{\bar{\sigma}}_a$ 和特征向量微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)}$。

有效应力率分解

由于 $\mathbb{P}^+$ 与 $\mathbb{P}^-$ 的非线性特性，不能直接求有效应力正、负分量的率表达式

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ \neq \mathbb{P}^+ : \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- \neq \mathbb{P}^- : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

定义有效应力率投影张量

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbb{Q}^+ : \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- = \mathbb{Q}^- : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

要求解率投影算子 $\mathbb{Q}^+$ 和 $\mathbb{Q}^-$，需要考虑所谓特征值摄动问题：给定有效应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 及其对应的特征值 $\hat{\sigma}_a$ 和特征向量 $\boldsymbol{n}^{(a)}$，对于有效应力微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，求解特征值微分 $\mathrm{d}\hat{\sigma}_a$ 和特征向量微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)}$。

特征值的微分

考虑张量形式的特征方程

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} = \hat{\bar{\sigma}}_a \boldsymbol{n}^{(a)}$$

左乘 $\boldsymbol{n}^{(a)}$ 得

$$\hat{\bar{\sigma}}_a = \boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)}$$

两边求微分，得

$$\mathrm{d}\hat{\bar{\sigma}}_a = \boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} + 2\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} = \boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} + 2\hat{\bar{\sigma}}_a \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)}$$

由于

$$\boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} = 1 \ \Rightarrow \ \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} = 0$$

可得

$$\mathrm{d}\hat{\bar{\sigma}}_a = \left(\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}\right) : \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

特征向量的微分和有效应力率分解

有关推导较为复杂，请参见教材或本章课件附录。

弹性 Helmholtz 自由能的分解

前已述及，对于未损伤材料，其弹性 Helmholtz 自由能可以表示为

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

考虑有效应力的正、负分解，上述表达式可以分解为

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \boldsymbol{\varepsilon} = \psi_0^+ + \psi_0^-$$

考虑不同的应力状态对应于不同的损伤机制，引入受拉损伤变量 d^+ 与受剪损伤变量 d^-，以此建立损伤材料的弹性 Helmholtz 自由能表达式为

$$\begin{aligned}\psi &= (1-d^+)\psi_0^+ + (1-d^-)\psi_0^- = \frac{1}{2}(1-d^+)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}(1-d^-)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}(1-d^+)\mathbb{P}^+ : \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}(1-d^-)\mathbb{P}^- : \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}$$

弹性 Helmholtz 自由能的分解

前已述及，对于未损伤材料，其弹性 Helmholtz 自由能可以表示为

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

考虑有效应力的正、负分解，上述表达式可以分解为

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \boldsymbol{\varepsilon} = \psi_0^+ + \psi_0^-$$

考虑不同的应力状态对应于不同的损伤机制，引入受拉损伤变量 d^+ 与受剪损伤变量 d^-，以此建立损伤材料的弹性 Helmholtz 自由能表达式为

$$\begin{aligned}\psi &= (1-d^+)\psi_0^+ + (1-d^-)\psi_0^- = \frac{1}{2}(1-d^+)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}(1-d^-)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}(1-d^+)\mathbb{P}^+ : \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}(1-d^-)\mathbb{P}^- : \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}$$

建立弹性损伤本构关系

将弹性 Helmholtz 自由能代入 Clausius-Duhem 不等式，得

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi}{\partial d^+} \dot{d}^+ - \frac{\partial \psi}{\partial d^-} \dot{d}^- \geq 0$$

可得一个等式

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

和两个不等式

$$-\frac{\partial \psi}{\partial d^+} \dot{d}^+ \geq 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial d^-} \dot{d}^- \geq 0$$

建立弹性损伤本构关系

对于等式，将 Helmholtz 自由能的表达式代入，可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= (1-d^{+})\frac{\partial\psi^{+}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} + (1-d^{-})\frac{\partial\psi^{-}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \\
&= (1-d^{+})\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{+} + (1-d^{-})\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{-} \\
&= (\mathbb{I} - d^{+}\mathbb{P}^{+} - d^{-}\mathbb{P}^{-}) : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \\
&= (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \\
&= (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}$$

此处

$$\mathbb{D} = d^{+}\mathbb{P}^{+} + d^{-}\mathbb{P}^{-}$$

为四阶损伤张量。

建立弹性损伤本构关系

定义损伤能释放率 $Y^{\pm} = -\frac{\partial \psi^{\pm}}{\partial \varepsilon} = \psi_0^{\pm}$，不等式化为

$$Y^{\pm} \dot{d}^{\pm} \geq 0$$

引入损伤一致性条件

$$G^{\pm}(Y^{\pm}, d^{\pm}) = 0$$

利用拉格朗日乘子法可得

$$\dot{d}^{\pm} = \dot{\lambda}^{\pm} \frac{\partial G^{\pm}}{\partial Y^{\pm}}$$

Kuhn-Tucker 条件

$$G^{\pm} \leq 0\,,\ \dot{\lambda}^{\pm} \geq 0\,,\ \dot{\lambda}^{\pm} G^{\pm} = 0$$

最终解得标量损伤演化

$$\dot{d}^{\pm} = f^{\pm\prime}(Y^{\pm})\,\dot{Y}^{\pm} \ \Rightarrow\ d^{\pm} = f^{\pm}(Y^{\pm})$$

建立弹性损伤本构关系

定义损伤能释放率 $Y^{\pm} = -\frac{\partial \psi^{\pm}}{\partial \varepsilon} = \psi_0^{\pm}$ ，不等式化为

$$Y^{\pm} \dot{d}^{\pm} \geq 0$$

引入损伤一致性条件

$$G^{\pm}(Y^{\pm}, d^{\pm}) = 0$$

利用拉格朗日乘子法可得

$$\dot{d}^{\pm} = \dot{\lambda}^{\pm} \frac{\partial G^{\pm}}{\partial Y^{\pm}}$$

Kuhn-Tucker 条件

$$G^{\pm} \leq 0\ ,\ \dot{\lambda}^{\pm} \geq 0\ ,\ \dot{\lambda}^{\pm} G^{\pm} = 0$$

最终解得标量损伤演化

$$\dot{d}^{\pm} = f^{\pm\prime}(Y^{\pm})\, \dot{Y}^{\pm} \ \Rightarrow\ d^{\pm} = f^{\pm}(Y^{\pm})$$

建立弹性损伤本构关系

对本构关系求微分

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d^+)\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^+ - \dot{d}^+\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ + (1-d^-)\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^- - \dot{d}^-\bar{\boldsymbol{\sigma}}^-$$

对于 $\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm$ 项，有

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm = \mathbb{Q}^\pm : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$$

对于 $\dot{d}^\pm\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm$ 项，有

$$\begin{aligned}
\dot{d}^\pm\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm &= f^{\pm\prime}(Y^\pm)\dot{Y}^\pm\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm = f^{\pm\prime}(Y^\pm)\frac{1}{2}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_0 : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm : \mathbb{C}_0 : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm \\
&= f^{\pm\prime}(Y^\pm)\frac{1}{2}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_0 : \mathbb{Q}^\pm : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm : \mathbb{C}_0 : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm \\
&= f^{\pm\prime}(Y^\pm)\frac{1}{2}\left[\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm\right) : \mathbb{C}_0 : \mathbb{Q}^\pm + \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm\right) : \mathbb{C}_0\right] : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \\
&:= \mathbb{R}^\pm : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}
\end{aligned}$$

建立弹性损伤本构关系

将 $\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^{\pm}$ 与 $\dot{d}^{\pm}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm}$ 表达式代入，可得

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \left[\mathbb{I} - \left(d^{+}\mathbb{Q}^{+} + d^{-}\mathbb{Q}^{-}\right) - \left(\mathbb{R}^{+} + \mathbb{R}^{-}\right)\right] : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \\
&= \left[\mathbb{I} - \left(d^{+}\mathbb{Q}^{+} + d^{-}\mathbb{Q}^{-}\right) - \left(\mathbb{R}^{+} + \mathbb{R}^{-}\right)\right] : \mathbb{E}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

切线刚度张量

$$
\mathbb{E}^{tan} = \left[\mathbb{I} - \left(d^{+}\mathbb{Q}^{+} + d^{-}\mathbb{Q}^{-}\right) - \left(\mathbb{R}^{+} + \mathbb{R}^{-}\right)\right] : \mathbb{E}_0
$$

损伤本构关系

考虑损伤本构关系

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$$

表征退化后刚度的割线刚度张量定义为

$$\mathbb{E}^{sec} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{E}_0 = (\mathbb{I} - d^+\mathbb{P}^+ - d^-\mathbb{P}^-) : \mathbb{E}_0$$

在二维受力状态下，对于各向同性材料，其初始弹性刚度张量可以写为如下矩阵形式

$$[\mathbb{E}] = \frac{1}{1-\nu_0^2}\begin{bmatrix} E_0 & E_0\nu_0 & 0 \\ E_0\nu_0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_0^2)\,G_0 \end{bmatrix}$$

损伤本构关系矩阵表示

由于正负分解在正负方向上的不连续性，对于不同的受力状态，损伤表达式的矩阵表示并不相同，在此分开表示：

- 双轴受拉$(\overline{\sigma}_1 > 0\,,\ \overline{\sigma}_2 > 0)$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{Bmatrix} = (1-d^+)\begin{Bmatrix}\overline{\sigma}_1\\ \overline{\sigma}_2\end{Bmatrix}$$

- 双轴受压$(\overline{\sigma}_1 \leq 0\,,\ \overline{\sigma}_2 \leq 0)$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{Bmatrix} = (1-d^-)\begin{Bmatrix}\overline{\sigma}_1\\ \overline{\sigma}_2\end{Bmatrix}$$

- 双轴拉压$(\overline{\sigma}_1 > 0\,,\ \overline{\sigma}_2 \leq 0)$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}(1-d^+)\overline{\sigma}_1\\ (1-d^-)\overline{\sigma}_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}(1-d^+) & 0\\ 0 & (1-d^-)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{\sigma}_1\\ \overline{\sigma}_2\end{Bmatrix}$$

割线刚度矩阵

由于双轴受拉与受压割线刚度推导过程基本一致，所得结果为完全各向同性损伤，所以在此统一讨论。考虑二维应力状态，经过推导，可得割线刚度矩阵

$$[\mathbb{E}]^{sec} = (1 - d^{\pm})[\mathbb{E}_0] = \frac{1 - d^{\pm}}{1 - \nu_0^2} \begin{bmatrix} E_0 & E_0\nu_0 & 0 \\ E_0\nu_0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_0^2)\, G_0 \end{bmatrix}$$

令 $E^{\pm} = (1 - d^{\pm})E_0$，可得

$$[\mathbb{E}]^{sec} = \frac{1}{1 - \nu_0^2} \begin{bmatrix} E^{\pm} & E^{\pm}\nu_0 & 0 \\ E^{\pm}\nu_0 & E^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2)\, G^{\pm} \end{bmatrix}$$

此处，

$$G^{\pm} = \frac{E^{\pm}}{2(1 + \nu_0)}$$

割线刚度矩阵

对于双轴拉压状态，将出现各向异性损伤。经过推导，可得其割线刚度矩阵为

$$[\mathbb{E}]^{sec} = \frac{1}{1-\nu_0^2}\begin{bmatrix} (1-d^+)E_0 & (1-d^+)E_0\nu_0 & 0 \\ (1-d^-)E_0\nu_0 & (1-d^-)E_0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu^2)G^\pm \end{bmatrix}$$

此处

$$G^\pm = \frac{(1-d^+)\hat{\bar{\sigma}}_1 - (1-d^-)\hat{\bar{\sigma}}_2}{\hat{\bar{\sigma}}_1 - \hat{\bar{\sigma}}_2}\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$$

上述本构关系的矩阵表示，构成了规范本构关系的基础。

割线刚度矩阵

对于双轴拉压状态，将出现各向异性损伤。经过推导，可得其割线刚度矩阵为

$$[\mathbb{E}]^{sec} = \frac{1}{1-\nu_0^2}\begin{bmatrix} (1-d^+)E_0 & (1-d^+)E_0\nu_0 & 0 \\ (1-d^-)E_0\nu_0 & (1-d^-)E_0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu^2)G^{\pm} \end{bmatrix}$$

此处

$$G^{\pm} = \frac{(1-d^+)\hat{\bar{\sigma}}_1 - (1-d^-)\hat{\bar{\sigma}}_2}{\hat{\bar{\sigma}}_1 - \hat{\bar{\sigma}}_2}\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$$

上述本构关系的矩阵表示，构成了规范本构关系的基础。

Helmholtz 自由能

先考虑 Helmholtz 自由能的弹性、塑性分解

$$\psi(d^+, d^-, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}) = \psi^e(d^+, d^-, \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(d^+, d^-, \boldsymbol{\kappa})$$

对于弹性 Helmholtz 自由能，直接采用弹性双标量损伤本构关系建立的表达式，同时将表达式中的总应变 ε 替换为弹性应变 ε^e，有

$$\begin{aligned}\psi^e &= (1-d^+)\psi_0^{e+} + (1-d^-)\psi_0^{e-} \\ &= \frac{1}{2}(1-d^+)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \varepsilon^e + \frac{1}{2}(1-d^-)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \varepsilon^e \\ &= \frac{1}{2}(1-d^+)\mathbb{P}^+ : \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \varepsilon^e + \frac{1}{2}(1-d^-)\mathbb{P}^- : \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \varepsilon^e\end{aligned}$$

Helmholtz 自由能

先考虑 Helmholtz 自由能的弹性、塑性分解

$$\psi(d^+, d^-, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}) = \psi^e(d^+, d^-, \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(d^+, d^-, \boldsymbol{\kappa})$$

对于弹性 Helmholtz 自由能，直接采用弹性双标量损伤本构关系建立的表达式，同时将表达式中的总应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 替换为弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$，有

$$\begin{aligned}\psi^e &= (1-d^+)\psi_0^{e+} + (1-d^-)\psi_0^{e-} \\ &= \frac{1}{2}(1-d^+)\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2}(1-d^-)\bar{\boldsymbol{\sigma}}^- : \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ &= \frac{1}{2}(1-d^+)\mathbb{P}^+ : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2}(1-d^-)\mathbb{P}^- : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e\end{aligned}$$

Helmholtz 自由能

先考虑 Helmholtz 自由能的弹性、塑性分解

$$\psi(d^+, d^-, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}) = \psi^e(d^+, d^-, \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(d^+, d^-, \boldsymbol{\kappa})$$

对于塑性 Helmholtz 自由能，也考虑如下形式的分解：

$$\psi^p = (1 - d^+)\psi_0^{p+} + (1 - d^-)\psi_0^{p-}$$

其中 ψ_0^{p+} 与 ψ_0^{p-} 表达式待定。

本构关系的建立

将弹性 Helmholtz 自由能代入 Clausius-Duhem 不等式，得

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \left(\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial d^+}\dot{d}^+ + \frac{\partial \psi}{\partial d^-}\dot{d}^-\right) \geq 0$$

可得一个等式和两个不等式

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial d^+}\dot{d}^+ - \frac{\partial \psi}{\partial d^-}\dot{d}^- \geq 0$$

本构关系的建立

将弹性 Helmholtz 自由能代入 Clausius-Duhem 不等式，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\psi}=\left(\boldsymbol{\sigma}-\frac{\partial\psi^e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e+\left(\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\frac{\partial\psi^p}{\partial\boldsymbol{\kappa}}\cdot\dot{\boldsymbol{\kappa}}\right)\\-\left(\frac{\partial\psi}{\partial d^+}\dot{d}^++\frac{\partial\psi}{\partial d^-}\dot{d}^-\right)\geq 0\end{aligned}$$

可得一个等式和两个不等式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}&=\frac{\partial\psi^e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}\\\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\frac{\partial\psi^p}{\partial\boldsymbol{\kappa}}\cdot\dot{\boldsymbol{\kappa}}&\geq 0\\-\frac{\partial\psi}{\partial d^+}\dot{d}^+-\frac{\partial\psi}{\partial d^-}\dot{d}^-&\geq 0\end{aligned}$$

本构关系的建立

考虑等式

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

将弹性 Helmholtz 自由能表达式代入上述等式，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (1-d^+)\frac{\partial \psi_0^{e+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + (1-d^-)\frac{\partial \psi_0^{e-}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \\ &= (1-d^+)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ + (1-d^-)\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- \\ &= \left[(1-d^+)\mathbb{P}^+ + (1-d^-)\mathbb{P}^-\right] : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \\ &= (\mathbb{I}-\mathbb{D}) : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e\end{aligned}$$

此处

$$\mathbb{D} = d^+\mathbb{P}^+ + d^-\mathbb{P}^-$$

为四阶损伤张量。

本构关系的建立

考虑塑性耗散不等式

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0$$

将应力表达式与塑性 Helmholtz 自由能分解表达式代入，可得

$$(1-d^+)\left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi_0^{p+}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}\right) + (1-d^-)\left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi_0^{p-}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}\right) \geq 0$$

首先，对于混凝土等伪脆性材料，拉应力作用下塑性应变很小，这里将受拉作用下的塑性耗能忽略，那么上式第一项为 0，再考虑第二项中 $(1-d^-)$ 恒大于等于 0，将上式简化为

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi_0^{p-}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0$$

本构关系的建立

考虑塑性耗散不等式

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0$$

将应力表达式与塑性 Helmholtz 自由能分解表达式代入，可得

$$(1-d^+)\left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi_0^{p+}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}\right) + (1-d^-)\left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi_0^{p-}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}\right) \geq 0$$

首先，对于混凝土等伪脆性材料，拉应力作用下塑性应变很小，这里将受拉作用下的塑性耗能忽略，那么上式第一项为 0，再考虑第二项中 $(1-d^-)$ 恒大于等于 0，将上式简化为

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi_0^{p-}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0$$

本构关系的建立

令 $\boldsymbol{q} := -\frac{\partial \psi_0^{p-}}{\partial \boldsymbol{\kappa}}$，定义如下塑性耗散表达式

$$W = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}$$

上式在屈服函数

$$f(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^-, \boldsymbol{q}) \leq 0$$

作为约束条件的情况下取极大值。构造复合函数

$$\Pi = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\lambda} f(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^-, \boldsymbol{q})$$

求偏导，可得相关流动法则

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}^-}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}$$

Kuhn-Tucker 条件

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0$$

本构关系的建立

令 $\boldsymbol{q} := -\frac{\partial \psi_0^{p-}}{\partial \boldsymbol{\kappa}}$，定义如下塑性耗散表达式

$$W = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}$$

上式在屈服函数

$$f(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^-, \boldsymbol{q}) \leq 0$$

作为约束条件的情况下取极大值。构造复合函数

$$\Pi = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\lambda} f(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^-, \boldsymbol{q})$$

求偏导，可得相关流动法则

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}^-}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}$$

Kuhn-Tucker 条件

$$f \leq 0, \ \dot{\lambda} \geq 0, \ \dot{\lambda} f = 0$$

本构关系的建立

考虑损伤耗散不等式

$$-\frac{\partial \psi}{\partial d^+}\dot{d}^+ - \frac{\partial \psi}{\partial d^-}\dot{d}^- \geq 0$$

定义损伤能释放率

$$\begin{aligned} Y^+ &= -\frac{\partial \psi}{\partial d^+} = \psi_0^{e+} + \psi_0^{p+} \approx \psi_0^{e+} \\ Y^- &= -\frac{\partial \psi}{\partial d^-} = \psi_0^{e-} + \psi_0^{p-} \end{aligned}$$

损伤耗散不等式可表示为

$$Y^+\dot{d}^+ + Y^-\dot{d}^- \geq 0$$

本构关系的建立

定义损伤耗散

$$W = Y^+ \dot{d}^+ + Y^- \dot{d}^-$$

考虑损伤一致性条件

$$G(d^+, d^-, Y^+, Y^-) = 0$$

为了简化模型，此处忽略受拉损伤变量与受剪损伤变量演化过程中的耦合效应，将损伤一致性条件简化为如下两个表达式：

$$\begin{cases} G^+(d^+, Y^+) = 0 \\ G^-(d^-, Y^-) = 0 \end{cases}$$

本构关系的建立

将两个表达式作为约束条件，求损伤耗散的极大值，考虑拉格朗日乘子法，构造如下复合函数

$$\Pi = Y^+\dot{d}^+ + Y^-\dot{d}^- - \dot{\lambda}^+ G^+(d^+, Y^+) - \dot{\lambda}^- G^-(d^-, Y^-)$$

求偏导，可得损伤演化方程

$$\dot{d}^+ = \dot{\lambda}^+ \frac{\partial G^+}{\partial Y^+}\,, \quad \dot{d}^- = \dot{\lambda}^- \frac{\partial G^-}{\partial Y^-}$$

Kuhn-Tucker 条件

$$G^\pm \le 0\,, \quad \dot{\lambda}^\pm \ge 0\,, \quad \dot{\lambda}^\pm G^\pm = 0$$

最终解得标量损伤演化

$$\dot{d}^\pm = f^{\pm\prime}(Y^\pm)\,\dot{Y}^\pm \Rightarrow d^\pm = f^\pm(Y^\pm)$$

本构关系的建立

将两个表达式作为约束条件，求损伤耗散的极大值，考虑拉格朗日乘子法，构造如下复合函数

$$\Pi = Y^+\dot{d}^+ + Y^-\dot{d}^- - \dot{\lambda}^+ G^+(d^+, Y^+) - \dot{\lambda}^- G^-(d^-, Y^-)$$

求偏导，可得损伤演化方程

$$\dot{d}^+ = \dot{\lambda}^+ \frac{\partial G^+}{\partial Y^+}\,, \quad \dot{d}^- = \dot{\lambda}^- \frac{\partial G^-}{\partial Y^-}$$

Kuhn-Tucker 条件

$$G^\pm \le 0\,,\ \dot{\lambda}^\pm \ge 0\,,\ \dot{\lambda}^\pm G^\pm = 0$$

最终解得标量损伤演化

$$\dot{d}^\pm = f^{\pm\prime}(Y^\pm)\,\dot{Y}^\pm \ \Rightarrow\ d^\pm = f^\pm(Y^\pm)$$

本构关系的建立

下面求解切线刚度张量。对本构关系求微分

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d^+)\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^+ - \dot{d}^+\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ + (1 - d^-)\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^- - \dot{d}^-\bar{\boldsymbol{\sigma}}^-$$

考虑 $\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm$ 表达式

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm = \mathbb{Q}^\pm : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$$

考虑 $\dot{d}^+\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+$ 表达式，由于不考虑受拉应力状态下的塑性变形，其表达式与双标量弹性损伤本构关系相同

$$\begin{aligned}\dot{d}^+\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ &= f^{+\prime}(Y^+)\frac{1}{2}\left[\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+\right) : \mathbb{C}_0 : \mathbb{Q}^+ + \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+\right) : \mathbb{C}_0\right] : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \\ &= \mathbb{R}^+ : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\end{aligned}$$

本构关系的建立

下面求解切线刚度张量。对本构关系求微分

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d^+)\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^+ - \dot{d}^+\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ + (1 - d^-)\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^- - \dot{d}^-\overline{\boldsymbol{\sigma}}^-$$

考虑 $\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm$ 表达式

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm = \mathbb{Q}^\pm : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$$

考虑 $\dot{d}^+\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+$ 表达式，由于不考虑受拉应力状态下的塑性变形，其表达式与双标量弹性损伤本构关系相同

$$\begin{aligned}\dot{d}^+\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ &= f^{+\prime}(Y^+)\frac{1}{2}\left[\left(\overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}}^+\right) : \mathbb{C}_0 : \mathbb{Q}^+ + \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}}^+\right) : \mathbb{C}_0\right] : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \\ &= \mathbb{R}^+ : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\end{aligned}$$

本构关系的建立

下面求解切线刚度张量。对本构关系求微分

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d^+)\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^+ - \dot{d}^+\overline{\boldsymbol{\sigma}}^+ + (1-d^-)\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^- - \dot{d}^-\overline{\boldsymbol{\sigma}}^-$$

考虑 $\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm$ 表达式

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}^\pm = \mathbb{Q}^\pm : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$$

考虑 $\dot{d}^-\overline{\boldsymbol{\sigma}}^-$ 表达式，考虑塑性自由能的影响，表达式变为

$$\begin{aligned}\dot{d}^-\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- &= f^{-\prime}(Y^-)\frac{1}{2}\left[\left(\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}_0 + 2\frac{\partial \psi_0^{p-}}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}^-}\right) \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \mathbb{Q}^-\right. \\ &\quad \left. + \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^- \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}}^-\right) : \mathbb{C}_0\right] : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \\ &= \mathbb{R}^- : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\end{aligned}$$

本构关系的建立

将 $\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^{\pm}$ 以及 $\dot{d}^{\pm}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\pm}$ 代入并整理，得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbb{I} - \left(d^{+}\mathbb{Q}^{+} + d^{-}\mathbb{Q}^{-}\right) - \left(\mathbb{R}^{+} + \mathbb{R}^{-}\right)\right] : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$$

利用有效应力空间塑性力学，易得

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbb{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

最终得切线刚度张量

$$\mathbb{E}^{tan} = \left[\mathbb{I} - \left(d^{+}\mathbb{Q}^{+} + d^{-}\mathbb{Q}^{-}\right) - \left(\mathbb{R}^{+} + \mathbb{R}^{-}\right)\right] : \mathbb{E}^{ep}$$

塑性演化的若干讨论

前述推导中忽略了拉应力导致的塑性应变，所以推导得到的塑性应变演化 $\dot{\varepsilon}^p$ 与有效应力的受剪分量 $\boldsymbol{\bar{\sigma}}^-$ 相对应。实际应用过程中，为了简化相关的计算，往往直接基于有效应力的全量 $\boldsymbol{\bar{\sigma}}$ 建立塑性演化表达式。

- 屈服条件

$$F(\boldsymbol{\bar{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$$

- 塑性流动

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F^p(\boldsymbol{\bar{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \boldsymbol{\bar{\sigma}}}$$

其中屈服函数 F 与演化势函数 F^p 如果相同，则为相关流动，否则为非相关流动。混凝土材料往往采用非相关流动。

塑性演化的若干讨论

前述推导中忽略了拉应力导致的塑性应变，所以推导得到的塑性应变演化 $\dot{\varepsilon}^p$ 与有效应力的受剪分量 $\boldsymbol{\overline{\sigma}}^-$ 相对应。实际应用过程中，为了简化相关的计算，往往直接基于有效应力的全量 $\boldsymbol{\overline{\sigma}}$ 建立塑性演化表达式。

- 屈服条件

$$F(\boldsymbol{\overline{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$$

- 塑性流动

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F^p(\boldsymbol{\overline{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \boldsymbol{\overline{\sigma}}}$$

其中屈服函数 F 与演化势函数 F^p 如果相同，则为相关流动，否则为非相关流动。混凝土材料往往采用非相关流动。

塑性演化的若干讨论

在吴—李模型中：

- 屈服函数采用

$$F(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \left[\alpha \bar{I}_1 + \sqrt{3\bar{J}_2} + \beta(\boldsymbol{\kappa}) < \hat{\bar{\sigma}}_{i,max} >\right] - (1-\alpha)c(\boldsymbol{\kappa})$$

- 塑性势函数采用 D-P 形式

$$F^p(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \alpha^p \bar{I}_1 + \sqrt{2\bar{J}_2}$$

- 塑性变量采用

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \{w\dot{\varepsilon}^p_{i,max}, -(1-w)\dot{\varepsilon}^p_{i,min}\}^T, \quad w = \frac{\sum_i \langle \hat{\bar{\sigma}}_i \rangle}{\sum_i |\hat{\bar{\sigma}}_i|}$$

塑性初始 Helmholtz 自由能

考虑 Ju 提出的表达式

$$\psi_0^p = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^p} \overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : d\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

将塑性流动表达式代入，可得

$$\psi_0^p = \int_0^{\lambda} \overline{\boldsymbol{\sigma}}^- : \frac{\partial F^p(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} d\lambda$$

将 D-P 型流动势函数

$$F^p(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \alpha^p \overline{I}_1 + \sqrt{2\overline{J}_2}$$

代入，经过一系列推导（吴建营博士论文）。

塑性初始 Helmholtz 自由能

可得

$$\psi_0^p = \frac{2}{3}\frac{\lambda}{||\bar{s}||}\left(3\bar{J}_2 + \eta^p \bar{I}_1\sqrt{3\bar{J}_2} - \frac{1}{2}\bar{I}_1^+\bar{I}_1\right)$$

分析等号右侧括号前的系数：λ 是表征塑性应变量值的标量，而 $||\bar{s}||$ 为表征应力偏量绝对量值的标量，二者的比值实际上反映了塑性割线模量的大小。引入系数 $b = \frac{4\lambda E}{||\bar{s}||}$ 表征弹性模量与塑性模量的相对大小，有

$$\psi_0^p = \frac{b}{2E_0}\left(3\bar{J}_2 + \eta^p \bar{I}_1\sqrt{3\bar{J}_2} - \frac{1}{2}\bar{I}_1^+\bar{I}_1\right)$$

在上式的基础上，再经过推导，可得受剪损伤能释放率

$$Y^- = \psi_0^{e+} + \psi_0^{p+} \approx b_0\left(\alpha\bar{I}_1 + \sqrt{3\bar{J}_2}\right)^2$$

塑性初始 Helmholtz 自由能

可得

$$\psi_0^p = \frac{2}{3}\frac{\lambda}{||\bar{s}||}\left(3\bar{J}_2^- + \eta^p \bar{I}_1^- \sqrt{3\bar{J}_2^-} - \frac{1}{2}\bar{I}_1^+ \bar{I}_1^-\right)$$

分析等号右侧括号前的系数：λ 是表征塑性应变量值的标量，而 $||\bar{s}||$ 为表征应力偏量绝对量值的标量，二者的比值实际上反映了塑性割线模量的大小。引入系数 $b = \frac{4\lambda E}{||\bar{s}||}$ 表征弹性模量与塑性模量的相对大小，有

$$\psi_0^p = \frac{b}{2E_0}\left(3\bar{J}_2^- + \eta^p \bar{I}_1^- \sqrt{3\bar{J}_2^-} - \frac{1}{2}\bar{I}_1^+ \bar{I}_1^-\right)$$

在上式的基础上，再经过推导，可得受剪损伤能释放率

$$Y^- = \psi_0^{e+} + \psi_0^{p+} \approx b_0\left(\alpha \bar{I}_1 + \sqrt{3\bar{J}_2}\right)^2$$

作业

研读以下两篇经典论文：

1. Lee, J. and Fenves, G.L. (1998). Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. ASCE. Journal of Engineering Mechanics Division. 124: 892-900.
2. Wu, J.Y., Li, J. and Faria, R. (2006). An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures. 43(3-4): 583-612.

基于所学知识点，比较两篇论文中所提出的弹塑性损伤模型的相同点和不同点。

结束

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue

（附录）特征向量的微分

对特征方程直接微分

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} + \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} &= \mathrm{d}\hat{\overline{\sigma}}_a \boldsymbol{n}^{(a)} + \hat{\overline{\sigma}}_a \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \\
\Rightarrow (\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \mathrm{d}\hat{\overline{\sigma}}_a \mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} &= (\hat{\overline{\sigma}}_a \mathbf{1} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)}
\end{aligned}
$$

两边左乘 $\boldsymbol{n}^{(b)}$，且考虑 $a \neq b$，得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n}^{(b)} \cdot (\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \mathrm{d}\hat{\overline{\sigma}}_a \mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} &= \boldsymbol{n}^{(b)} \cdot (\hat{\overline{\sigma}}_a \mathbf{1} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \\
\Rightarrow \boldsymbol{n}^{(b)} \cdot \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} &= (\hat{\overline{\sigma}}_a - \hat{\overline{\sigma}}_b) \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \boldsymbol{n}^{(b)} \\
\Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \cdot \boldsymbol{n}^{(b)} &= \frac{1}{\hat{\overline{\sigma}}_a - \hat{\overline{\sigma}}_b} (\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(b)}) : \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}}
\end{aligned}
$$

（附录）特征向量的微分

以特征向量作为坐标基，考虑特征向量增量在其上的投影，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} = \mathrm{d}n_1^{(a)}\boldsymbol{n}^{(1)} + \mathrm{d}n_2^{(a)}\boldsymbol{n}^{(2)} + \mathrm{d}n_3^{(a)}\boldsymbol{n}^{(3)} = \sum_b \mathrm{d}n_b^{(a)}\boldsymbol{n}^{(b)}$$

两边点乘 $\boldsymbol{p}_j$，并由之前的结论可得

$$\mathrm{d}n_b^{(a)} = \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)}\cdot\boldsymbol{n}^{(b)}(a \neq b)\ ,\quad \mathrm{d}n_a^{(a)} = \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)}\cdot\boldsymbol{n}^{(a)} = 0$$

代入前式，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} = \sum_b (\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)}\cdot\boldsymbol{n}^{(b)})\boldsymbol{n}^{(b)} = \sum_{b,b\neq a} (\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)}\cdot\boldsymbol{n}^{(b)})\boldsymbol{n}^{(b)}$$

将前页结果代入，可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} = \sum_{b,b\neq a}\left[\frac{1}{\hat{\bar{\sigma}}_a - \hat{\bar{\sigma}}_b}(\boldsymbol{n}^{(a)}\otimes\boldsymbol{n}^{(b)}) : \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}}\right]\boldsymbol{n}^{(b)}$$

（附录）有效应力率分解

考虑有效应力正分量表达式

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{+} = \sum_{a} \langle \hat{\overline{\sigma}}_a \rangle \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}$$

两边求微分

$$\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{+} = \sum_{a} \mathrm{H}(\hat{\overline{\sigma}}_a)\mathrm{d}\hat{\overline{\sigma}}_a \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} + \sum_{a} \langle \hat{\overline{\sigma}}_a \rangle (\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} + \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)})$$

上式第一项，考虑特征值的微分

$$\sum_{a} \mathrm{H}(\hat{\overline{\sigma}}_a)\mathrm{d}\hat{\overline{\sigma}}_a \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} = \sum_{a} \mathrm{H}(\hat{\overline{\sigma}}_a) \left[(\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}) : \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}} \right] \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}$$

$$= \sum_{a} \mathrm{H}(\hat{\overline{\sigma}}_a)(\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}) : \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{P}^{+} : \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\sigma}}$$

（附录）有效应力率分解

第二项分成两部分，考虑特征向量的微分，有

$$\sum_a \langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} = \sum_a \sum_{b, b\neq a} \left[\frac{\langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle}{\hat{\bar{\sigma}}_a - \hat{\bar{\sigma}}_b} (\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(b)}) : \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] \boldsymbol{n}^{(b)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}$$

$$\sum_a \langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} = \sum_a \sum_{b, b\neq a} \left[\frac{\langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle}{\hat{\bar{\sigma}}_a - \hat{\bar{\sigma}}_b} (\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(b)}) : \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(b)}$$

第二项为

$$\sum_a \langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle (\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} + \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)})$$

$$= \sum_a \sum_{b, b\neq a} \left[\frac{\langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle}{\hat{\bar{\sigma}}_a - \hat{\bar{\sigma}}_b} (\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(b)}) : \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] (\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(b)} + \boldsymbol{n}^{(b)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)})$$

（附录）有效应力率分解

定义二阶对称张量

$$\boldsymbol{P}^{ab} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(b)} + \boldsymbol{n}^{(b)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)}\right)$$

前述第二项转化为

$$\sum_{a} \langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle (\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \boldsymbol{n}^{(a)} + \boldsymbol{n}^{(a)} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{n}^{(a)}) = \sum_{a} \sum_{b, b \neq a} \left[\frac{2\langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle}{\hat{\bar{\sigma}}_b - \hat{\bar{\sigma}}_b} (\boldsymbol{P}^{ab} \otimes \boldsymbol{P}^{ab}) \right] : \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

与第一项合并，得

$$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{+} = \left\{ \mathbb{P}^{+} + \sum_{a} \sum_{b, b \neq a} \left[\frac{2\langle \hat{\bar{\sigma}}_a \rangle}{\hat{\bar{\sigma}}_b - \hat{\bar{\sigma}}_b} (\boldsymbol{P}^{ab} \otimes \boldsymbol{P}^{ab}) \right] \right\} : \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

（附录）有效应力率分解

可得有效应力率正投影张量

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}^{+} =& \mathbb{P}^{+} + \sum_{a} \sum_{b, b \neq a} \left[\frac{2 \langle \hat{\sigma}_a \rangle}{\hat{\sigma}_b - \hat{\sigma}_b} \left(\boldsymbol{P}^{ab} \otimes \boldsymbol{P}^{ab} \right) \right] \\
=& \mathbb{P}^{+} + 2 \sum_{a, b > a} \left[\frac{\langle \hat{\sigma}_a \rangle - \langle \hat{\sigma}_b \rangle}{\hat{\sigma}_a - \hat{\sigma}_b} \left(\boldsymbol{P}^{ab} \otimes \boldsymbol{P}^{ab} \right) \right]
\end{aligned}
$$

又由于

$$
\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{+} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{-}
$$

所以有效应力率负投影张量

$$
\mathbb{Q}^{-} = \mathbb{I} - \mathbb{Q}^{+} = \mathbb{P}^{-} - 2 \sum_{a, b > a} \left[\frac{\langle \hat{\sigma}_a \rangle - \langle \hat{\sigma}_b \rangle}{\hat{\sigma}_a - \hat{\sigma}_b} \left(\boldsymbol{P}^{ab} \otimes \boldsymbol{P}^{ab} \right) \right]
$$