混凝土随机损伤本构关系

损伤力学基础研究生课程之八

任晓丹

同济大学建筑工程系

May 9, 2016

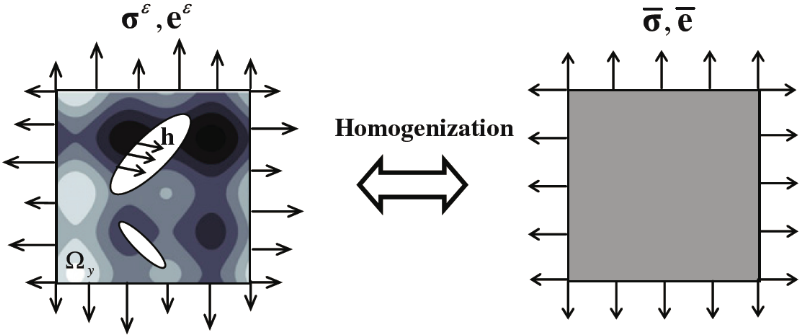
本节主要内容

1. 细观损伤机制分析
2. 细观随机断裂模型
   - 单轴受拉模型
   - 单轴受压模型
   - 塑性变形的考虑
3. 混凝土弹塑性随机损伤本构关系
   - 能量等效应变
   - 多维弹塑性随机损伤本构关系

参考文献

- Kandarpa, S., D.J. Kirkner, B.F. Spencer, Stochastic damage model for brittle materials subjected to monotonic loading. Journal of Engineering Mechanics-ASCE, 1996. 122(8): p. 788-795.
- 李杰, 混凝土随机损伤力学 -背景、意义与研究进展，李宏男、伊廷华主编《结构防灾、监测与控制》, 2008, pp69-86.
- Li, J., X. Ren, Stochastic Damage Model of Concrete Based on Energy Equivalent Strain. International Journal of Solids and Structures, 2009.46: p2407-2419.
- 李杰, 杨卫忠. 2009, 混凝土弹塑性随机损伤本构关系研究. 土木工程学报, 42(2):31-38.
- 李杰, 任晓丹. 2010, 混凝土静力与动力损伤本构模型研究进展述评. 力学进展. 40(3): 284-297.

细观断裂与宏观损伤



细观断裂

宏观连续体

细观断裂与宏观损伤

可以证明如下细观应力、应变与宏观应力、应变之间的关系：

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V_y}\int_{\Omega_y} \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega := \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle + \frac{1}{2V_y}\oint_{\Gamma_C} (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{u})\, d\Gamma$$

细观应力应变考虑为弹性关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

宏观应力应变关系考虑损伤的影响，引入四阶损伤张量表达式

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \langle\mathbb{E}\rangle : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

细观断裂与宏观损伤

采用四阶张量$\mathbb{X}$定义均匀化应变与局部应变的关系如下：

$$\varepsilon = (\mathbb{I} - \mathbb{X}) : \tilde{\varepsilon}$$

代入线性本构关系，可得细观应力

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \varepsilon = \mathbb{E} : (\mathbb{I} - \mathbb{X}) : \tilde{\varepsilon}$$

由宏观应力与细观应力的关系，得

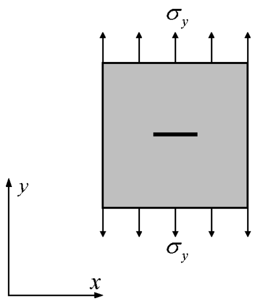
$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{E} : (\mathbb{I} - \mathbb{X}) : \tilde{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{E} : (\mathbb{I} - \mathbb{X}) \rangle : \tilde{\varepsilon}$$

比较上式与宏观损伤表达式

$$\mathbb{D} = \langle \mathbb{E} : \mathbb{X} \rangle : \langle \mathbb{E} \rangle^{-1}$$

对于张量 $\mathbb{X}$ 的求解构成了细观力学的核心问题。

Case 1：受拉应力状态



条件：单轴受拉，单裂纹垂直于加载方向，裂纹相对于单元体足够小。

根据弹性断裂力学知识，可解得如下裂纹端部应力场

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left[1 - \sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right] \\ \sigma_y = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left[1 + \sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right] \\ \tau_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \end{cases}$$

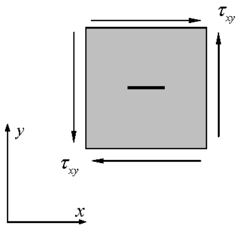
其中应力强度因子

$$K_I = \sigma_y\sqrt{\pi a}$$

裂纹张开位移（COD）

$$[u_y] = \sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{4}{E}\sigma_y$$

Case 2：受剪应力状态



条件：纯剪受力，单裂纹在正交方向，裂纹相对于单元体足够小。

根据弹性断裂力学知识，可解得如下裂纹端部应力场

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\dfrac{\theta}{2}\left[2+\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right] \\ \sigma_y = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left[1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right] \end{cases}$$

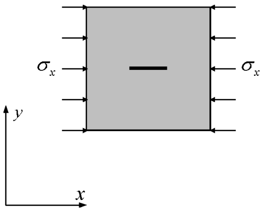
其中应力强度因子

$$K_{II} = \tau_{xy}\sqrt{\pi a}$$

裂纹张开位移（COD）

$$[u_x] = \sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{4}{E}\tau_{xy}$$

Case 3：受压应力状态



条件：单轴受压，单裂纹在压应力方向，裂纹相对于单元体足够小（远场近似解）。

根据弹性断裂力学知识，可解得单元体内的应力分布

$$\begin{cases} \sigma_x = p \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

单元体内的应变分布

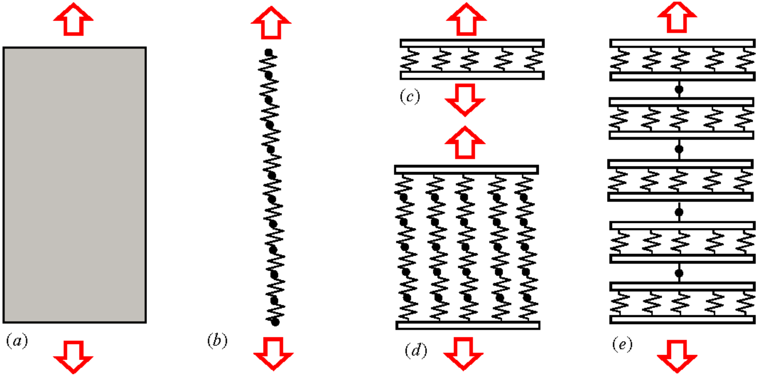
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{p}{E} \\ \varepsilon_y = -\nu\frac{p}{E} \end{cases}$$

基于上述结果即可知，单元体内应力、应变完全均匀，裂纹没有引起应力重分布!

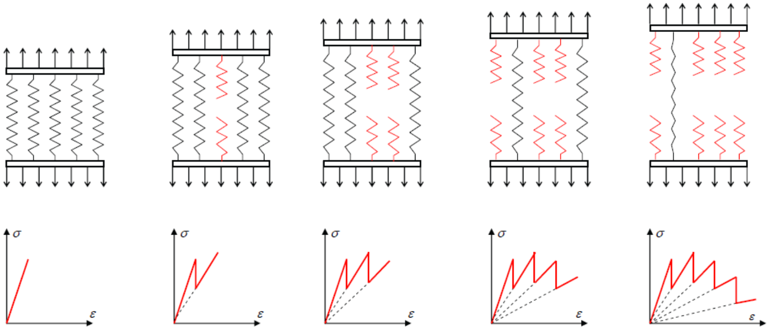
细观分析的若干结论

- 损伤在不同的尺度上有着不同的表现形式，并且遵循不同形式的物理规律。细观尺度上表现裂缝的产生和发展，宏观尺度上表现为材料性能的连续裂化。
- 根据前述细观分析，可以明晰宏观损伤产生和发展的两种机制：受拉损伤机制与受剪损伤机制。单纯的受压损伤机制可以在分析中忽略。
- 目前的细观分析还只能给出特别简单的情形下的解析解，对于复杂的边界条件和裂纹分布，如果再考虑裂纹间相互作用的影响，通过解析的方式确定宏观损伤的方法是不具有实用性的。

细观元件模型

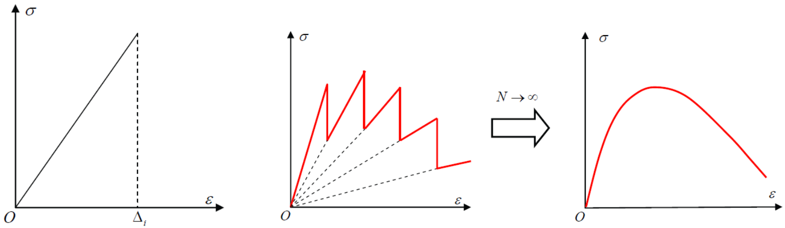


并联弹簧模型



弹簧束断裂过程

并联弹簧模型



单根弹簧　　弹簧束　　极限

考虑基于面积的损伤定义，有

$$d = \frac{A_d}{A}$$

此处 A_d 为断裂部分的面积而 A 为总面积。

并联弹簧模型

认为每一根弹簧面积相同，根据上述损伤定义，损伤变量为

$$d = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} H(\varepsilon - \Delta_i)$$

N 为弹簧的总数，Δ_i 为第 i 根弹簧的断裂应变，$H(\cdot)$ 为 Heaviside 函数。随着细观弹簧数目的增加，即 $N \to \infty$，考虑随机积分的定义，可得

$$d = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} H(\varepsilon - \Delta_i)\right\} = \int_0^1 H[\varepsilon - \Delta(x)]\,dx$$

其中 $\Delta(x)$ 为一维断裂应变随机场；x 表示细观单元的空间坐标。当 $N \to \infty$ 时，每一根细观弹簧造成的系统应力跌落将趋于一个小量，由此，系统的平均应力应变曲线就由锯齿曲线变成光滑曲线，此处包含随机场 $\Delta(x)$ 和 Heaviside 函数还需要进一步考察。

并联弹簧模型

假定材料的细观断裂随机场为平稳随机场，则其一阶密度函数与二阶相关密度函数可表示为

$$
\begin{cases} f(\Delta, x) = f(\Delta) \\ f(\Delta_1, \Delta_2; x_1, x_2) = f(\Delta_1, \Delta_2; |x_1 - x_2|) \end{cases}
$$

损伤变量的均值演化

$$
\begin{aligned}
\mu_d &= E\left\{\int_0^1 H[\varepsilon - \Delta(x)]\, dx\right\} = \int_0^1 E\{H[\varepsilon - \Delta(x)]\}\, dx \\
&= \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} H[\varepsilon - \Delta(x)] f(\Delta)\, d\Delta\, dx = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\varepsilon} f(\Delta)\, d\Delta\, dx \\
&= F(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

并联弹簧模型

考虑损伤的方差演化。首先由方差公式

$$V_d^2 = E(d^2) - [E(d)]^2 = E\left\{\int_0^1 H[\varepsilon - \Delta(x)]\,dx\right\}^2 - [\mu_d(\varepsilon)]^2$$

式中第一项可化为（自己推一下）：

$$\begin{aligned} E\left\{\int_0^1 H[\varepsilon - \Delta(x)]\,dx\right\}^2 &= \int_0^1\int_0^1 F(\varepsilon, \varepsilon; |x_1 - x_2|)\,dx_1\,dx_2 \\ &= 2\int_0^1 (1-\gamma)F(\Delta_1, \Delta_2; \gamma)\,d\gamma \end{aligned}$$

损伤方差演化表达式为

$$V_d^2(\varepsilon) = 2\int_0^1 (1-\gamma)F(\Delta_1, \Delta_2; \gamma)\,d\gamma - [F(\varepsilon)]^2$$

并联弹簧模型

考虑细观随机场的具体表达式。在混凝土强度的统计中，一般将混凝土的强度参数的分布取为 对数正态分布。在细观弹簧服从理想线弹性 -断裂应关系条件下，可取断裂应变场为对数正态随机场。

取

$$Z(x) = \ln \Delta(x)$$

为平稳正态随机场，其均值和方差为 (λ, ζ^2)。$(\mu_\Delta, \sigma_\Delta^2)$ 表示 $\Delta(x)$ 的均值和方差，则两组均值与方差的换算关系为

$$\begin{cases} \lambda = E[\ln \Delta(x)] = \ln \left(\frac{\mu_\Delta}{\sqrt{1+\sigma_\Delta^2/\mu_\Delta^2}} \right) \\ \zeta^2 = Var[\ln \Delta(x)] = \ln \left(1 + \frac{\sigma_\Delta^2}{\mu_\Delta^2} \right) \end{cases}$$

并联弹簧模型

定义对数正态分布与标准正态分布的变换关系如下

$$\alpha = \frac{\ln \varepsilon - \lambda}{\zeta}$$

则对数正态随机场的一维与二维分布函数可以用标准正态分布的一维与二维分布函数表示如下

$$\begin{cases} F(\varepsilon) = \Phi(\alpha) \\ F(\varepsilon, \varepsilon; \gamma) = \Phi(\alpha, \alpha \mid \rho_z) \end{cases}$$

其中 $\rho_z(\gamma)$ 为相关函数，一般可取为指数函数形式，即

$$\rho_z(\gamma) = e^{-\xi\gamma}$$

这里 ξ 为材料的相关长度。

并联弹簧模型

$\Phi(\alpha)$ 和 $\Phi(\alpha, \alpha \mid \rho_z)$ 分别为标准正态分布的一维、二维分布函数。在数值计算中，前者一般采用有理函数逼近，后者则一般采用下述公式转化成一维数值积分，即

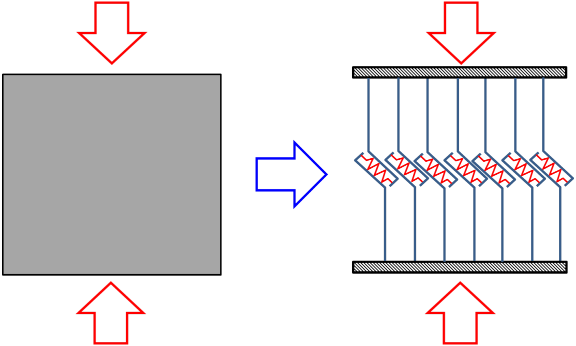
$$\Phi(\alpha, \alpha \mid \rho_z) = \Phi(\alpha) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta} \frac{1}{1+t^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2}(1+t^2)} dt$$

积分上限

$$\beta = \sqrt{\frac{1-\rho_z}{1+\rho_z}}$$

上述细观力学模型引入了 3 个参数 $(\lambda^+, \zeta^+, \xi^+)$ 描述受拉随机损伤的演化过程。

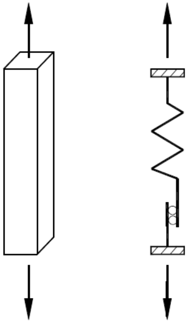
基于受剪机制的单轴受压模型



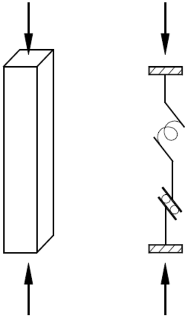
受压并联元件模型

建立与受拉并联元件模型相同的表达式，同时引入了 3 个参数 $(\lambda^-, \zeta^-, \xi^-)$ 描述受压随机损伤的演化过程。

考虑塑性滑移的细观元件模型



受拉元件



受压元件

考虑塑性滑移的细观元件模型

按照前述模型，将应变分解为两部分

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

分离出塑性应变之后，随机损伤本构关系表示为

$$\begin{cases} \sigma = [1 - D^+(\varepsilon^e)]E(\varepsilon - \varepsilon^p) \\ \sigma = [1 - D^-(\varepsilon^e)]E(\varepsilon - \varepsilon^p) \end{cases}$$

塑性应变可以采用经验关系确定，我们建议

$$\varepsilon^p = f(D, \varepsilon^e) = \xi_p D^{n_p} \varepsilon^e$$

能量等效应变

基于前面的介绍，可知在一般意义上给出损伤演化方程的基本形式为

$$\begin{cases} d^+ = g_Y^+(Y^+) \\ d^- = g_Y^-(Y^-) \end{cases}$$

实际由试验或者细观损伤理论得到的一维损伤演化往往表达成应变的形式，即损伤标量是单轴应变或者弹性应变的函数，如下：

$$\begin{cases} d^+ = g^+(\varepsilon^{e+}) \\ d^- = g^-(\varepsilon^{e-}) \end{cases}$$

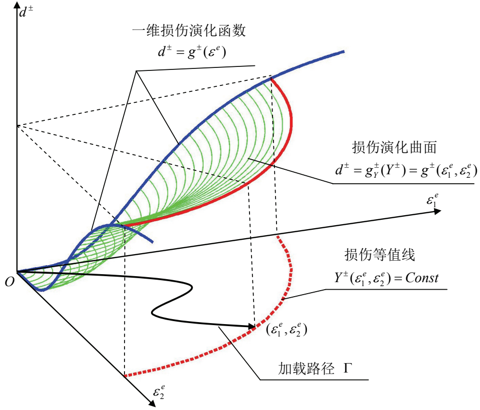
损伤能释放率 $Y^{\pm}$ 与单轴应变 $\varepsilon^{e\pm}$ 并不直接对等。 因此，基于单轴应变建立的一维损伤演化函数往往不能直接应用于基于损伤能释放率表示的多维损伤演化。这里基于损伤一致性条件建立能量能效应变表达式，以便可以直接采用一维损伤演化函数表示多维加载条件下的损伤演化。

能量等效应变

Lemma

如果两个应力状态的损伤能释放率相等，那么二者的损伤变量取值就相等，并且与二者的具体受力状态无关。

能量等效应变



损伤演化的几何结构

根据损伤一致性条件，在损伤等值线上的各应力状态损伤能释放率保持不变，其损伤变量的取值也相等。因此对于任意一个二维受力状态 $(\varepsilon_1^e,\varepsilon_2^e)$，可以获得与一维受力状态能量等效的应变 ε^e，按照这一应变由一维损伤演化方程计算损伤变量，所得损伤变量值将与直接基于二维应力状态计算的损伤值相同。

能量等效应变

一般地，对于三维应力状态，损伤能释放率亦可表示为

$$\begin{cases} Y^+ = Y^+(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e) \\ Y^- = Y^-(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e) \end{cases}$$

而对于一维应力状态，将 $(\overline{\sigma}_1 = E_0\varepsilon^e, \overline{\sigma}_2 = 0, \overline{\sigma}_3 = 0)$ 分别代入受拉损伤能释放率和受压损伤能释放率表达式，可得

$$\begin{cases} y^+ = \frac{E_0}{2}(\varepsilon^{e+})^2 \\ y^- = b_0[(\alpha - 1)E_0\varepsilon^{e-}]^2 \end{cases}$$

显然，这个特定条件下三维受力状态的损伤能释放率等于单轴受力状态的损伤能释放率

$$\begin{cases} Y^+ = y^+ \\ Y^- = y^- \end{cases}$$

能量等效应变

根据损伤一致条件，在损伤等面上，一般三维受力状态亦满足上述关系，因此，可解得与多维受力状态等效的单轴应变如下

$$\begin{cases} \varepsilon_{eq}^{e+} = \sqrt{\dfrac{2\,Y^{+}}{E_0}} \\ \varepsilon_{eq}^{e-} = \dfrac{1}{(\alpha-1)E_0}\sqrt{\dfrac{Y^{+}}{b_0}} \end{cases}$$

其中 ε_{eq}^{e+} 与 ε_{eq}^{e-} 定义为能量等效应变。因此，多维损伤演化可由试验确定的一维损伤演化函数以能量等效应变表示为

$$\begin{cases} d^{+} = g^{+}(\varepsilon_{eq}^{e+}) \\ d^{-} = g^{-}(\varepsilon_{eq}^{e-}) \end{cases}$$

其中，$g^{\pm}(\cdot)$ 的具体形式可分别由单轴受拉与受压试验或者细观分析确定。

多维弹塑性随机损伤本构关系

首先考虑多维损伤本构关系表达式和有效应力表达式

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \;,\; \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

采用有效应力空间的塑性理论，上式中塑性应变与有效应力可以解得，求解中不需要考虑损伤的取值。
对于双标量损伤模型，损伤张量可分解为

$$\mathbb{D} = d^+\mathbb{P}^+ + d^-\mathbb{P}^-$$

基于能量等效应变的概念，多维损伤演化可以由一维损伤演化表示，采用本章建立的一维随机损伤演化表达式，有

$$d^+ = \int_0^1 H[\varepsilon_{eq}^{e+} - \Delta^+(x)]\,dx \;,\; d^- = \int_0^1 H[\varepsilon_{eq}^{e-} - \Delta^-(x)]\,dx$$

多维弹塑性随机损伤本构关系

上述损伤演化表达式中，能量等效应变是损伤能释放率的单调函数，有

$$
\varepsilon_{eq}^{e+} = \sqrt{\frac{2\,Y^{+}}{E_0}}
$$

$$
\varepsilon_{eq}^{e-} = \frac{1}{(\alpha - 1)\,E_0}\sqrt{\frac{Y^{+}}{b_0}}
$$

而损伤能释放率 Y^{+} 和 Y^{-} 可由有效应力计算得出，有

$$
Y^{+} = \frac{1}{2E_0}\left[\frac{2(1+\nu_0)}{3}3\bar{J}_2^{+} + \frac{1-2\nu_0}{3}(\bar{I}_1^{+})^2 - \nu_0\bar{I}_1^{+}\bar{I}_1^{-}\right]
$$

$$
Y^{-} = b_0\left(\alpha\bar{I}_1^{-} + \sqrt{3\bar{J}_2^{-}}\right)^2
$$

多维弹塑性随机损伤本构关系

考虑多维随机损伤演化，四阶损伤张量的均值和方差为

$$\mu_{\mathbf{D}} = \mu_{d^+}\mathbb{P}^+ + \mu_{d^-}\mathbb{P}^-$$
$$V_{\mathbf{D}}^2 = V_{d^+}^2\mathbb{P}^+ + V_{d^-}^2\mathbb{P}^-$$

对应力表达式求均值和方差，有

$$\mu_{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbb{I} - \mu_{\mathbb{D}}) : \mathbb{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$
$$V_{\boldsymbol{\sigma}}^2 = V_{\mathbb{D}}^2 : \mathbb{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

多维弹塑性随机损伤本构关系

- 塑性应变 ε^p 的演化可以采用上一章介绍的有效应力空间塑性理论描述。但是，有效应力空间塑性理论具有严谨的理论基础，但是其中某些量，比如有效应力空间的屈服函数与演化势等，缺乏直接的实验支撑。
- 这里拟采用基于实验结果建立的多维塑性经验模型：

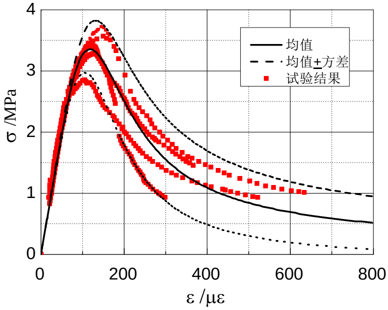
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p+} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p-} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\pm} = f_{p\pm}^{\pm} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e\pm} \\ f_p^{\pm} = H(\dot{d}^{\pm}) \xi_p^{\pm} (d^{\pm})^{n_p^{\pm}} \end{cases}$$

- 经过推导可得弹塑性切线刚度

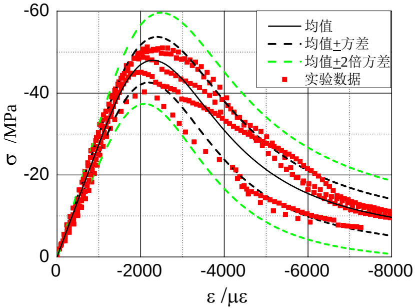
$$\mathbb{E}^{ep} = \left[\mathbb{I} + H(\dot{d}^+) \xi_p^+ (d^+)^{n_p^+} \mathbb{Q}^+ + H(\dot{d}^-) \xi_p^- (d^-)^{n_p^-} \mathbb{Q}^- \right]^{-1} : \mathbb{E}_0$$

- 至此，我们建立起了多维弹塑性随机损伤本构关系

模型结果

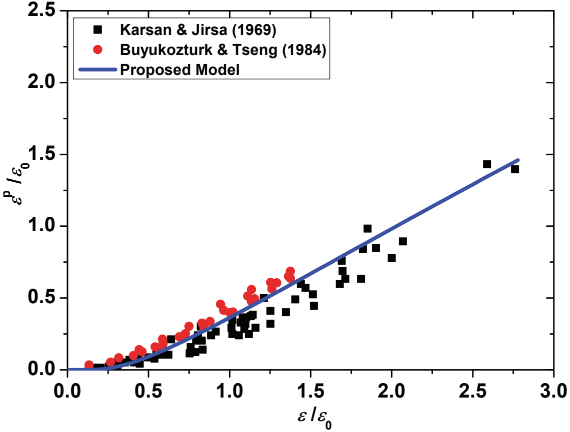


单轴受拉



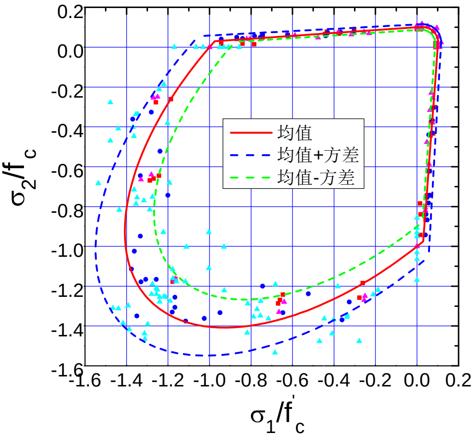
单轴受压

模型结果


Karsan & Jirsa (1969)
Buyukozturk & Tseng (1984)
Proposed Model
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
$\varepsilon^p/\varepsilon_0$
$\varepsilon/\varepsilon_0$

塑性应变

模型结果



双轴峰值应力包络图

小结

- 本章基于并联元模型，建立了混凝土单轴受力状态下的随机损伤本构关系，建立了损伤演化的均值、方差表达式；
- 基于能量等效应变，将一维随机损伤本构关系推广到多维，建立了多维弹塑性随机损伤本构关系；
- 本章的随机演化还是基于二阶状态量的描述，这种描述并不能完备地反映状态量的非线性演化，完备的描述须基于概率密度，相关内容将在后续章节中涉及；
- 本章建立的混凝土随机损伤模型，抓住了混凝土损伤演化的要旨，简单而形象地体现了应力重分布过程以及在这一过程中随机性与非线性的耦合。但是，这类模型对于应力重分布规律的反映是抽象的，难以直接说明混凝土裂纹扩展过程中因为裂缝相互作用所导致的复杂现象。对于损伤细观演化的更精细的描述须基于多尺度理论与精细数值模拟技术。

结束

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue