本构关系数值算法

损伤力学基础研究生课程之九

任晓丹

同济大学建筑工程系

September 29, 2017

本节主要内容

1. 微分方程数值算法
2. 一维本构关系数值算法
3. 多维本构关系数值算法
   - 弹性预测
   - 塑性修正
   - 损伤修正
   - 一致刚度

参考文献

- Juan C. Simo and Thomas R.J. Hughes. 1997, Computational Inelasticity. Springer, New York.
- Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran. 2000. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons.
- 吴建营. 2004. 基于损伤能释放率的混凝土弹塑性损伤本构及其在结构非线性分析应用. 同济大学博士学位论文. 指导教师：李杰.

微分方程数值算法

- 考虑如下微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(x(t)), & t \in [0, T] \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

其中速度 $a(x)$ 的函数关系已知

- 将时间 $[0, T]$ 离散, 考虑时间增量步 $[t_n, t_{n+1}]$，已知 t_n 时刻的状态量 $x(t_n) = x_n$，求 t_{n+1} 时刻的状态量 x_{n+1}.
- 利用微分中值定理

$$a(x_{n+\vartheta}) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$$

微分方程数值算法

最终可得如下一阶微分方程数值算法公式：

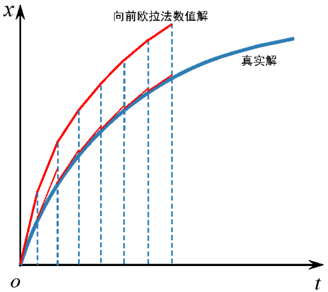
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(x_{n+\vartheta})\Delta t \\ x_{n+\vartheta} = (1-\vartheta)x_n + \vartheta x_{n+1} \end{cases}$$

- 取 $\vartheta = 0$，为前进欧拉算法：$x_{n+1} = x_n + a(x_n)\Delta t$
- 取 $\vartheta = \frac{1}{2}$，为中心点法：$x_{n+1} = x_n + a(\frac{x_n + x_{n+1}}{2})\Delta t$
- 取 $\vartheta = 1$，为后退欧拉法：$x_{n+1} = x_n + a(x_{n+1})\Delta t$

微分方程数值算法

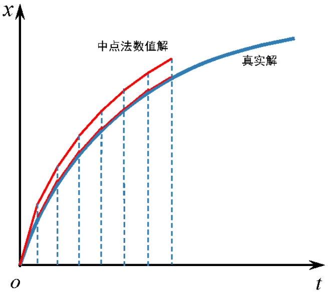
前进欧拉算法

$$x_{n+1} = x_n + a(x_n)\Delta t$$



中心点法

$$x_{n+1} = x_n + a(\frac{x_n + x_{n+1}}{2})\Delta t$$



微分方程数值算法

后退欧拉法：

$$x_{n+1} = x_n + a(x_{n+1})\Delta t$$

- 将微分方程转化成了代数方程；
- 求解依赖于未知量 x_{n+1} ，所以称为完全隐式积分方法；
- 依赖非线性方程数值求解方法（最常用的为牛顿方法），一般而言需要迭代；
- 向后欧拉方法同样具有一阶收敛精度，但其数值误差不会累积、即是无条件稳定的；
- 在非线性应力—应变关系的数值求解中得到了非常广泛的应用。

一维弹塑性损伤本构关系基本方程

- 一维本构关系

$$\sigma = \left(1 - d\right)\bar{\sigma}, \qquad \bar{\sigma} = E_0 \epsilon^e = E_0\left(\epsilon - \epsilon^p\right)$$

- 一维损伤演化

$$d = g\left(r_n\right), \qquad r_n = \max_{\tau \in [0, t_n]} \left(\epsilon^e\right)$$

- 一维塑性演化

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}\dfrac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\lambda}\mathrm{sign}(\bar{\sigma}) \\ \dot{\kappa} = \dot{\lambda} \\ \bar{\sigma} = E_0\left(\epsilon - \epsilon^p\right) \\ F = \left|\bar{\sigma}\right| - \left(\bar{\sigma}_Y + E_p \kappa\right) \le 0 \end{cases}$$

塑性演化的求解

考虑 $t \in [0, T]$ 时间段内某一时间增量步 $[t_n, t_{n+1}]$，时间增量步长为 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$，其中，t_n 时刻对应的应变 ϵ_n 已知。此时，利用增量应变加载的方式求应力—应变数值解的问题转化为：在已知状态变量 $(\bar{\sigma}_n, \epsilon_n^p, \kappa_n)$ 和应变增量 $\Delta\epsilon = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n$ 的条件下，求取 t_{n+1} 时刻的状态变量 $(\bar{\sigma}_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1})$。采用向后欧拉方法可将改写为如下非线性方程组：

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1}^p & = \epsilon_n^p + \Delta\lambda \operatorname{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}) \\ \kappa_{n+1} & = \kappa_n + \Delta\lambda \\ \bar{\sigma}_{n+1} & = E_0\left(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^p\right) \\ F_{n+1} & = \left|\bar{\sigma}_{n+1}\right| - \left(\bar{\sigma}_Y + E_p\kappa\right) \le 0 \end{cases}$$

弹性预测

- 首先假定在增量步 $[t_n, t_{n+1}]$ 中没有塑性演化，从而按弹性预测的状态变量为：

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1}^{p,\text{trial}} & = \epsilon_n^p \\ \kappa_{n+1}^{\text{trial}} & = \kappa_n \\ \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} & = E_0\left(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{p,\text{trial}}\right) \\ F_{n+1}^{\text{trial}} & = \left|\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\right| - \left(\bar{\sigma}_Y + E_p\kappa_{n+1}^{\text{trial}}\right) \leq 0 \end{cases}$$

- 进而进行（弹性或塑性）状态判断

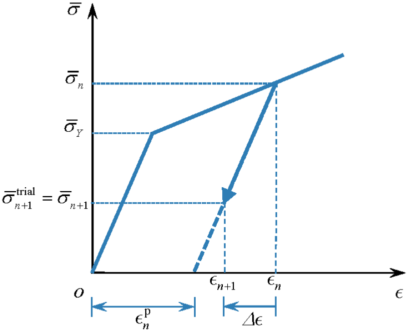
$$\begin{cases} F_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 & \text{弹性 (加) 卸载状态} \\ F_{n+1}^{\text{trial}} > 0 & \text{塑性加载状态} \end{cases}$$

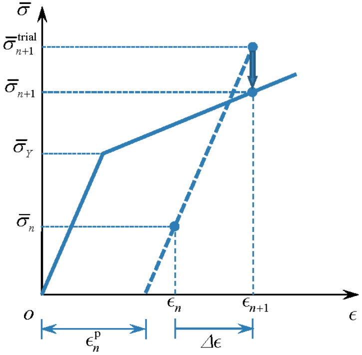
（弹性或塑性）状态判断

$$\begin{cases} F_{n+1}^{\text{trial}} \le 0 & \text{弹性 (加) 卸载状态} \\ F_{n+1}^{\text{trial}} > 0 & \text{塑性加载状态} \end{cases}$$

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}} \quad \text{本步结束}$$

$$F_{n+1} = 0,\ \Delta\lambda > 0 \quad \text{塑性求解}$$





塑性修正

将非线性方程组

$$\begin{cases} \epsilon^p_{n+1} &= \epsilon^p_n + \varDelta\lambda \mathrm{sign}(\bar\sigma_{n+1}) \\ \kappa_{n+1} &= \kappa_n + \varDelta\lambda \\ \bar\sigma_{n+1} &= E_0\left(\epsilon_{n+1} - \epsilon^p_{n+1}\right) \\ F_{n+1} &= \left|\bar\sigma_{n+1}\right| - \left(\bar\sigma_Y + E_p\kappa\right) \le 0 \end{cases}$$

改写为残量形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}^p_{n+1} &= -\epsilon^p_{n+1} + \epsilon^p_n + \varDelta\lambda \mathrm{sign}(\bar\sigma_{n+1}) = 0 \\ F_{n+1} &= \left|\bar\sigma_{n+1}\right| - \left(\bar\sigma_Y + E_p\kappa^{\mathrm{trial}}_{n+1} + E_p\varDelta\lambda\right) = 0 \end{cases}$$

并有效应力

$$\bar\sigma_{n+1} = E_0\left(\epsilon_{n+1} - \epsilon^p_n\right) - E_0\varDelta\epsilon^p = \bar\sigma^{\mathrm{trial}}_{n+1} - E_0\varDelta\lambda \mathrm{sign}(\bar\sigma_{n+1})$$

塑性修正

对有效应力表达式采用等式 $x = \left|x\right|\mathrm{sign}(x)$ 化简，可得

$$\left|\bar{\sigma}_{n+1}\right|\mathrm{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}) = \left|\bar{\sigma}_{n+1}^{\mathrm{trial}}\right|\mathrm{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}^{\mathrm{trial}}) - E_0 \mathit{\Delta}\lambda \mathrm{sign}(\bar{\sigma}_{n+1})$$

即

$$\left(\left|\bar{\sigma}_{n+1}\right| + E_0 \mathit{\Delta}\lambda\right)\mathrm{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}) = \left|\bar{\sigma}_{n+1}^{\mathrm{trial}}\right|\mathrm{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}^{\mathrm{trial}})$$

可得

$$\begin{cases} \mathrm{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}) = \mathrm{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}^{\mathrm{trial}}) \\ \left|\bar{\sigma}_{n+1}\right| + E_0 \mathit{\Delta}\lambda = \left|\bar{\sigma}_{n+1}^{\mathrm{trial}}\right| \end{cases}$$

塑性修正

代入屈服条件

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \left|\bar{\sigma}_{n+1}\right| - \left(\bar{\sigma}_Y + E_p \kappa_{n+1}^{\text{trial}} + E_p \Delta\lambda\right) \\ &= \left|\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\right| - E_0 \Delta\lambda - \left(\bar{\sigma}_Y + E_p \kappa_{n+1}^{\text{trial}} + E_p \Delta\lambda\right) = 0 \end{aligned}$$

可解得

$$\Delta\lambda = \frac{\left|\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\right| - \left(\bar{\sigma}_Y + E_p \kappa_{n+1}^{\text{trial}}\right)}{E_0 + E_p} = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{E_0 + E_p}$$

进而可解得 t_n 时刻的状态变量 $(\bar{\sigma}_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1})$

损伤修正

- 损伤修正

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1}^e = \epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^p \\ r_{n+1} = \max\left(\epsilon_n^e, \epsilon_{n+1}^e\right) \\ d_{n+1} = g(r_{n+1}) \end{cases}$$

- 应力求解

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{n+1} = E_0 \epsilon_{n+1}^e \\ \sigma_{n+1} = \left(1 - d_{n+1}\right) \bar{\sigma}_{n+1} \end{cases}$$

多维本构关系数值算法

- 已知：上一个时刻 t_n 的应变 $\boldsymbol{\epsilon}_n$、基本状态变量 $\boldsymbol{\sigma}_n, d_n^{\pm}, \boldsymbol{\epsilon}_n^p, \boldsymbol{\kappa}_n$
- 给定：应变增量 $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$
- 求：t_{n+1} 时刻的状态变量 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, d_{n+1}^{\pm}, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mathrm{p}}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}$
- 弹性预测、塑性修正、损伤修正、一致刚度

弹性预测

冻结塑性演化与损伤演化，有

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}} & = \mathbb{E}_0 : \left(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{p,trial}}\right) \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{p,trial}} & = \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{p}} \\ \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\text{trial}} & = \boldsymbol{\kappa}_n \\ d_{n+1}^{\pm,\text{trial}} & = d_n^{\pm} \end{cases}$$

状态判断

$$F_{n+1}^{\text{trial}} = F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\text{trial}}) \begin{cases} < 0 & (\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}} \quad \text{本步结束} \\ \geq 0 & F_{n+1} = 0,\ \Delta\lambda > 0 \quad \text{塑性求解} \end{cases}$$

塑性修正

采用后退欧拉方法改写塑性演化方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta\lambda \boldsymbol{\Gamma}_{n+1} \\ \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n + \Delta\lambda \boldsymbol{H}_{n+1} \end{cases}$$

塑性应变流动方向矢量 $\boldsymbol{\Gamma}_{n+1}$ 和硬化模量 $\boldsymbol{H}_{n+1}$ 分别记为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma}_{n+1} = \dfrac{\partial F^p\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}\right)}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \\ \boldsymbol{H}_{n+1} = \boldsymbol{H}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}\right) \end{cases}$$

经过塑性修正后的状态变量为 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, d_n^{\pm}, \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}$

塑性修正

与屈服条件、有效应力方程结合，形成塑性空间封闭方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\epsilon}_{n}^{\mathrm{p}} + \Delta\lambda \boldsymbol{\Gamma}_{n+1} \\ \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_{n} + \Delta\lambda \boldsymbol{H}_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbb{E}_0 : \left(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mathrm{p}}\right) \\ F_{n+1} = F\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}\right) = 0 \end{cases}$$

对有效应力表达式进一步变形

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbb{E}_0 : \left(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n}^{\mathrm{p}}\right) - \mathbb{E}_0 : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mathrm{trial}} - \mathbb{E}_0 : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}$$

牛顿方法

- 不失一般性，考虑非线性方程

$$f(x) = 0$$

- 对其进行 Taylor 级数展开并略去二阶以上项（即所谓线性化），可以给出如下迭代格式

$$f^{(k)} + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^{(k)} \delta x = 0, \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x$$

- 式中，δx 为第 k 次迭代结束时 x 的增量，即

$$\delta x = -\left[\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^{(k)}\right]^{-1} f^{(k)}$$

塑性求解

将由后退欧拉法得到塑性控制方程写成残量的形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^{\epsilon^{\mathrm{p}}}_{n+1} = \mathbb{C}_0 : \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{trial}}_{n+1}\right) + \Delta\lambda \boldsymbol{\Gamma}_{n+1} = 0 \\ \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\kappa}}_{n+1} = -\boldsymbol{\kappa}_{n+1} + \boldsymbol{\kappa}_n + \Delta\lambda \boldsymbol{H}_{n+1} = 0 \\ F_{n+1} = F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

将上述方程组进行线性化后得到（式中省略了上标 (k)，以下除非特别说明，所有的变量均在第 k 次迭代开始时取值）:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^{\epsilon^{\mathrm{p}}}_{n+1} + \mathbb{C}_0 : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta\boldsymbol{\Gamma}_{n+1} \cdot \delta(\Delta\lambda) + \Delta\lambda \cdot \delta\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\kappa}}_{n+1} - \delta\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{H}_{n+1} \cdot \delta\big(\Delta\lambda\big) + \Delta\lambda \cdot \delta\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0} \\ F_{n+1} + \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} F : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_{\boldsymbol{\kappa}} F \cdot \delta\boldsymbol{\kappa} = 0 \end{cases}$$

其中

$$\delta\boldsymbol{\Gamma} = \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\boldsymbol{\Gamma} : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{\Gamma} \cdot \delta\boldsymbol{\kappa} \ , \quad \delta\boldsymbol{H} = \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\boldsymbol{H} \cdot \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{H} \cdot \delta\boldsymbol{\kappa}$$

塑性求解

整理可得

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_0 + \Delta\lambda \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \boldsymbol{\Gamma} & \Delta\lambda \partial_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\Gamma} \\ \Delta\lambda \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \boldsymbol{H} & \Delta\lambda \partial_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \delta\boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}}_{n+1} \\ \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\kappa}}_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{n+1} \\ \boldsymbol{H}_{n+1} \end{bmatrix} \delta(\Delta\lambda)$$

可解得

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \delta\boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = -\mathbb{A}_{n+1} : \left[\boldsymbol{R}_{n+1} + \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \delta(\Delta\lambda) \right]$$

其中

$$\mathbb{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_0 + \Delta\lambda \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \boldsymbol{\Gamma} & \Delta\lambda \partial_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\Gamma} \\ \Delta\lambda \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \boldsymbol{H} & \Delta\lambda \partial_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{R}_{n+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}}_{n+1} \\ \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{\kappa}}_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{n+1} \\ \boldsymbol{H}_{n+1} \end{bmatrix}$$

塑性求解

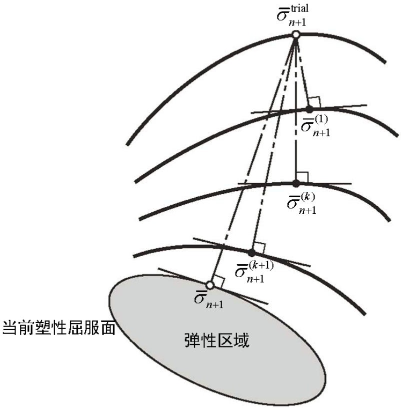
代入屈服函数的线性化表达式，整理可解得塑性流动因子

$$\delta(\Delta\lambda) = \frac{F_{n+1} - \nabla F_{n+1} : \mathbb{A}_{n+1} : \boldsymbol{R}_{n+1}}{\nabla F_{n+1} : \mathbb{A}_{n+1} : \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}}$$

第 k 次迭代结束后的有效应力、塑性应变、硬化参数和塑性流动因子可以分别更新为：

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k+1)} & = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)} + \delta\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mathrm{p}(k+1)} & = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mathrm{p}(k)} + \delta\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mathrm{p}(k)} - \mathbb{C}_0 : \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(k+1)} & = \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(k)} + \delta\boldsymbol{\kappa} \\ \Delta\lambda^{(k+1)} & = \Delta\lambda^{(k)} + \delta(\Delta\lambda) \end{cases}$$

塑性求解



基于 Newton-Raphson 迭代方法的最近点投影回映算法

损伤修正

- 损伤修正

$$\begin{cases} d_{n+1}^{\pm} = g^{\pm}(r_{n+1}^{\pm}) \\ r_{n+1}^{\pm} = \max(\epsilon_{n}^{e\pm}, \epsilon_{n+1}^{e\pm}) \\ \epsilon_{n+1}^{e\pm} = f^{\pm}(Y_{n+1}^{\pm}) \\ Y_{n+1}^{\pm} = Y^{\pm}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \end{cases}$$

- 应力更新

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - d_{n+1}^{+})\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{+} + (1 - d_{n+1}^{-})\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{-}$$

切线刚度

- 材料切线刚度

$$\mathbb{E}^{\tan} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_{n+1}$$

- 算法一致刚度

$$\mathbb{E}^{\tan}_{\mathrm{alg}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}}$$

- 二者各表示什么意义？二者是否相等？
- 如果不相等，如何选取？

切线刚度

- 回到最简单的情况

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(x(t)) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}, \quad x_{n+1} = x_n + a(x_{n+1})(t_{n+1} - t_n)$$

- （材料）切线刚度

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{n+1} = a(x_{n+1})$$

切线刚度

- 回到最简单的情况

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(x(t)) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}, \quad x_{n+1} = x_n + a(x_{n+1})(t_{n+1} - t_n)$$

- 算法一致刚度

$$dx_{n+1} = \left.\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}\right|_{n+1} \Delta t \mathrm{d}x_{n+1} + a(x_{n+1})\mathrm{d}t_{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \left.\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}\right|_{n+1} \Delta t\right) \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{\mathrm{d}t_{n+1}} = a(x_{n+1})$$

- 与（材料）切向刚度不相等，且

$$\Delta t \to 0, \quad \frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{\mathrm{d}t_{n+1}} \to \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{n+1}$$

切线刚度

- 材料切线刚度与算法切线刚度不一致的来源？
- 离散系统（后退欧拉系统）逼近连续系统（微分系统）产生的误差
- 如何选取？
  - 为什么要使用刚度？
  - 用于结构层次非线性方程的迭代求解
  - 为什么要使用切线刚度？
  - 基于切线刚度可以达到二阶收敛速度
  - 数值计算过程中采用的是离散系统还是连续系统？
  - 离散系统！
- 结论：多数时候应采用算法一致刚度，算法一致刚度是“将错就错”的结果！
- 具体推导请自学课本相关章节

结束

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue