

有限单元法研究生核心课程

第三讲 弹性力学平面问题的有限元流程

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院



弹性力学问题有限元流程概略

单元插值

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{B}^e(\mathbf{x})\mathbf{d}$$

单元积分

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega \quad \mathbf{P}^e = \int_{\Gamma_s^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega$$

组装整体刚度矩阵、荷载向量

$$\mathbf{K} = \underset{e=1}{\overset{n_{el}}{\mathbf{A}}} \mathbf{K}^e \quad \mathbf{P} = \underset{e=1}{\overset{n_{el}}{\mathbf{A}}} \mathbf{P}^e$$

有限元直接刚度方程

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{P}$$

考虑（边界）约束条件

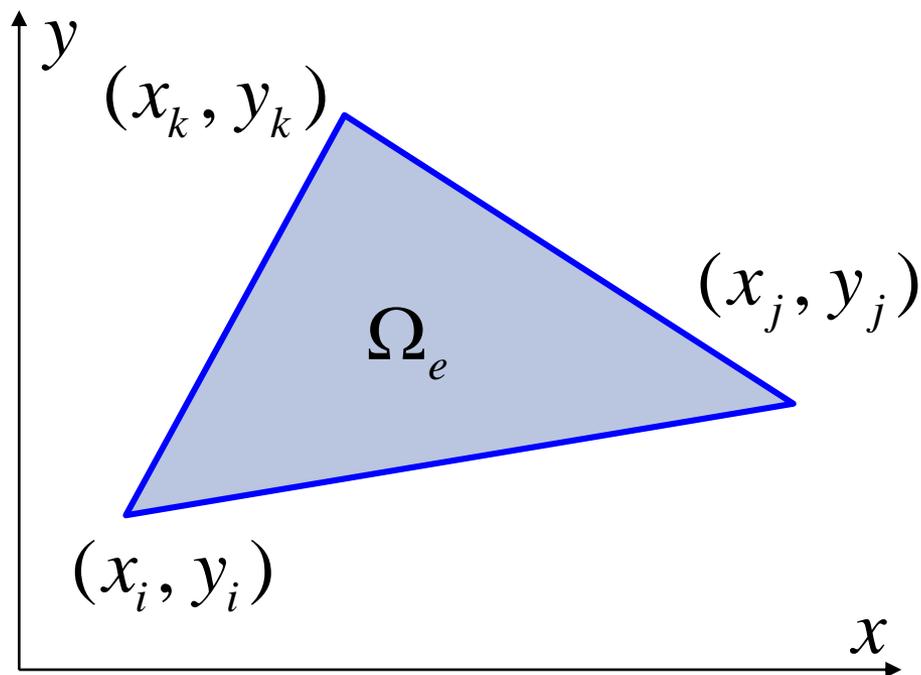
$$\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{P}}$$

线性方程求解

$$\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{K}}^{-1} \underline{\mathbf{P}}$$



平面三角形单元



单元区域记为： Ω_e

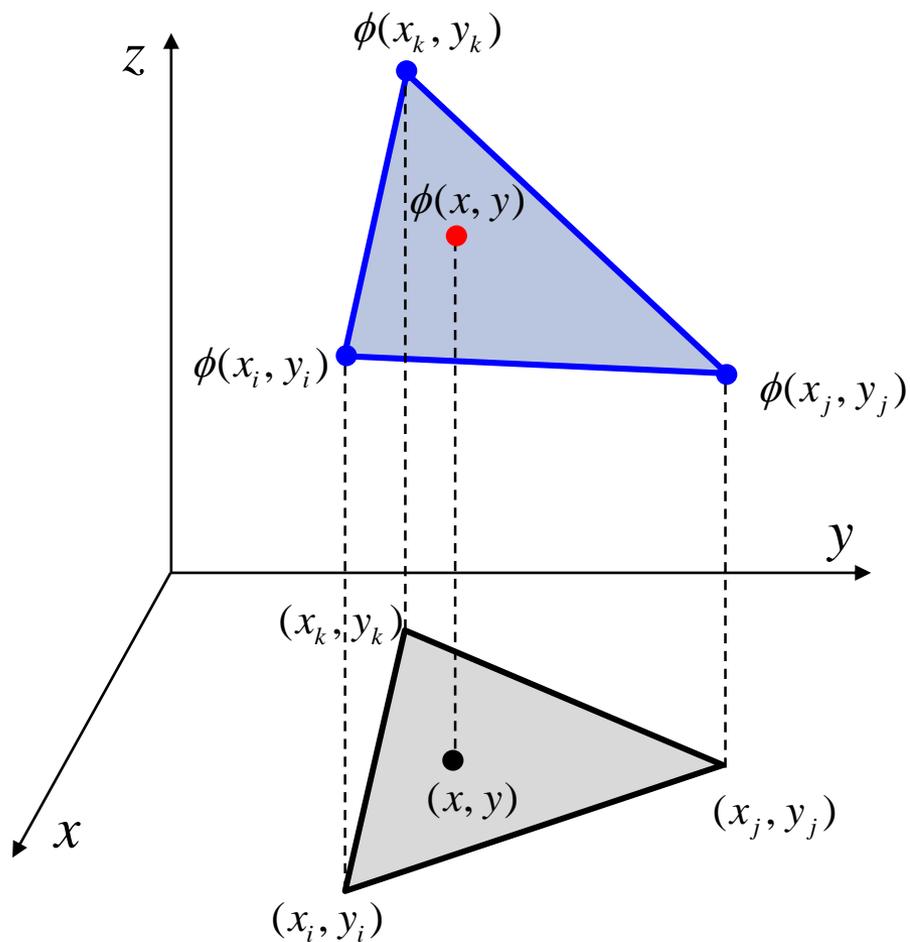
三个节点编号： i, j, k

三个节点坐标：

$(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$



平面三角形单元



已知:

(x_i, y_i) (x_j, y_j) (x_k, y_k)

$\phi(x_i, y_i)$ $\phi(x_j, y_j)$ $\phi(x_k, y_k)$

$\forall (x, y) \in \Omega_e$

估计: $\phi(x, y)$



平面三角形单元

$$\phi(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$



$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i = \Phi_i \\ \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j = \Phi_j \\ \beta_1 + \beta_2 x_k + \beta_3 y_k = \Phi_k \end{cases}$$



$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2A} (a_i \Phi_i + a_j \Phi_j + a_k \Phi_k) \\ \beta_2 = \frac{1}{2A} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k) \\ \beta_3 = \frac{1}{2A} (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k) \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = -x_j + x_k \end{cases} \quad (i, j, k)$$



平面三角形单元

$$\phi(x, y) = N_i(x, y)\Phi_i + N_j(x, y)\Phi_j + N_k(x, y)\Phi_k$$

其中：

$$\begin{cases} N_i(x, y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j(x, y) = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k(x, y) = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{cases}$$

Kronecker delta

Partition of unity

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

$$N_i(x, y) + N_j(x, y) + N_k(x, y) = 1$$



平面三角形单元

位移向量：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i(x, y)u_i + N_j(x, y)u_j + N_k(x, y)u_k \\ N_i(x, y)v_i + N_j(x, y)v_j + N_k(x, y)v_k \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k \end{bmatrix}^T$$



平面三角形单元

$$\begin{cases} N_i(x, y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j(x, y) = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k(x, y) = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{cases}$$

应变:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}^e = \mathbf{B}\mathbf{a}^e$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i & \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_k \end{bmatrix}$$

单元内应变
为常数!



平面三角形单元

应力:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{DB}\mathbf{a}^e = \mathbf{S}\mathbf{a}^e$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{DB} = \left[\mathbf{S}_i \quad \mathbf{S}_j \quad \mathbf{S}_k \right]$$

$$\mathbf{S}_i = \frac{E}{2(1-\nu^2)A} \begin{bmatrix} b_i & \nu c_i \\ \nu b_i & c_i \\ (1-\nu^2)c_i/2 & (1-\nu^2)b_i/2 \end{bmatrix} \quad (i, j, k)$$

上述表达式适用于平面应力问题；
平面应变问题只需对E和ν进行代换即可。



平面三角形单元

单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} tA = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_j \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i & \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_k \end{bmatrix} tA$$

$p, q = i, j, k$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ik} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jk} \\ \mathbf{K}_{ki} & \mathbf{K}_{kj} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{pq} = \mathbf{B}_p^T \mathbf{D} \mathbf{B}_q tA = \frac{Et}{4(1-\nu^2)A} \begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_2 & K_4 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = b_p b_q + \frac{1-\nu^2}{2} c_p c_q \quad K_2 = \nu c_p b_q + \frac{1-\nu^2}{2} b_p c_q$$

$$K_3 = \nu b_p c_q + \frac{1-\nu^2}{2} c_p b_q \quad K_4 = c_p c_q + \frac{1-\nu^2}{2} b_p b_q$$



平面三角形单元

单元刚度矩阵：

对称性：来源于伽辽金法。

主元恒正：本质上也来源于伽辽金法。

奇异性：

存在节点位移向量使得： $\mathbf{K}\bar{\mathbf{a}}^e = \lambda\bar{\mathbf{a}}^e = 0$

$$\Rightarrow \Pi_{pe} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}^e)^T \mathbf{K}\bar{\mathbf{a}}^e = \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \right) tA = 0 \quad \text{零能模式}$$

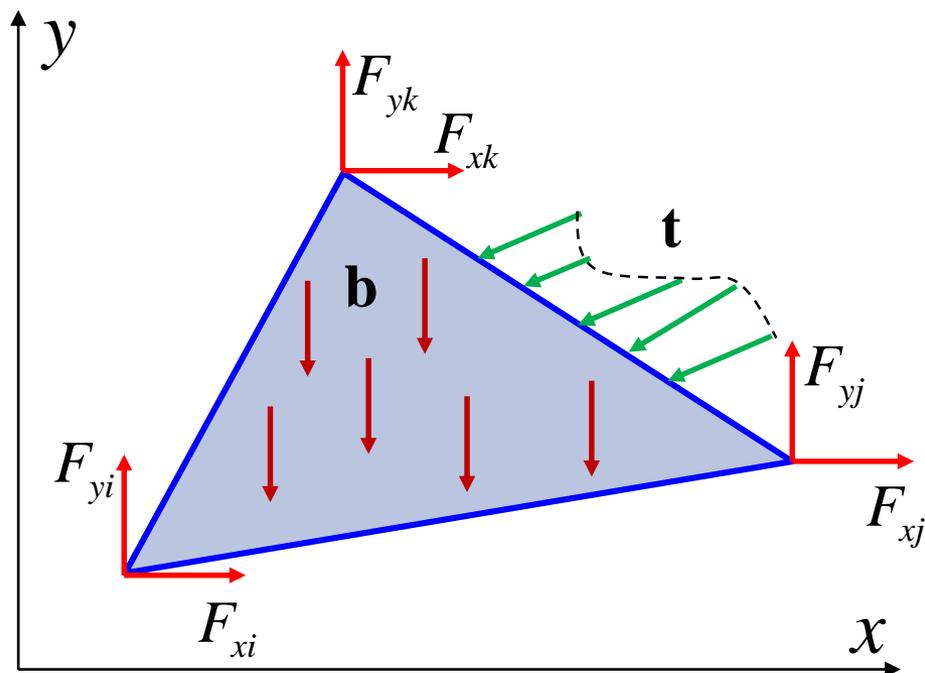
刚体位移！



平面三角形单元

单元节点荷载向量:

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Gamma_s^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega$$



结构整体集成

刚度矩阵：
$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{K}^e = \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{G}^e]^T \mathbf{K}^e \mathbf{G}^e \leftarrow \text{转换矩阵}$$

$$\mathbf{G}^e = \begin{matrix} & 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & k & \cdots & n_{nd} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

荷载向量：
$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{P}^e = \sum_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{G}^e]^T \mathbf{P}^e$$



结构整体集成

刚度矩阵：

$$[\mathbf{G}^e]^T \mathbf{K}^e \mathbf{G}^e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{K}_{ii} & \dots & \mathbf{K}_{ij} & \dots & \mathbf{K}_{ik} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{K}_{ji} & \dots & \mathbf{K}_{jj} & \dots & \mathbf{K}_{jk} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{K}_{ki} & \dots & \mathbf{K}_{kj} & \dots & \mathbf{K}_{kk} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

荷载向量：

$$[\mathbf{G}^e]^T \mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \mathbf{P}_i^e & \dots & \mathbf{P}_j^e & \dots & \mathbf{P}_k^e & \dots & 0 \end{bmatrix}$$



结构刚度矩阵的性质

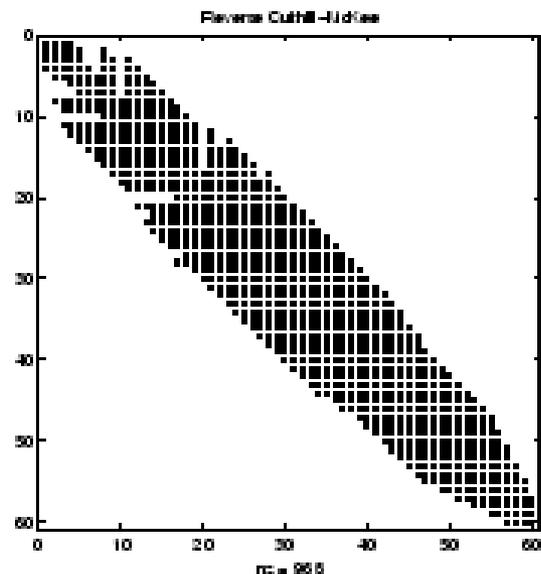
对称性：来源于伽辽金法。

主元恒正：本质上也来源于伽辽金法。

奇异性：也有零能模式。

稀疏性：来源于单元之间的联通结构。

非零元素带状分布：来源于单元之间的联通结构。



位移（边界）约束条件

直接代入法：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_a \\ \mathbf{a}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix}$$

拉格朗日乘子法

$$\mathbf{K}_{aa} \mathbf{a}_a = \mathbf{P}_a - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{a}_b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1} (\mathbf{P}_a - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{a}_b)$$

置大数法：

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \alpha K_{jj} & \vdots & \dots \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha K_{jj} \bar{a}_j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

罚函数法

置0-1法.....



线性方程组求解

- 小型问题一般采用**直接法**，大型问题一般采用**间接法**。
- 小型问题主要利用矩阵的**正定性**，大型问题主要利用矩阵的**稀疏性**。
- 求解方法与存储方法往往密切相关。



有限元解的性质

系统势能：
$$\Pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{P}$$

精确解满足：
$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \Pi_p \Rightarrow \min \Pi_p$$

$$\tilde{\Pi}_p \geq \Pi_p$$

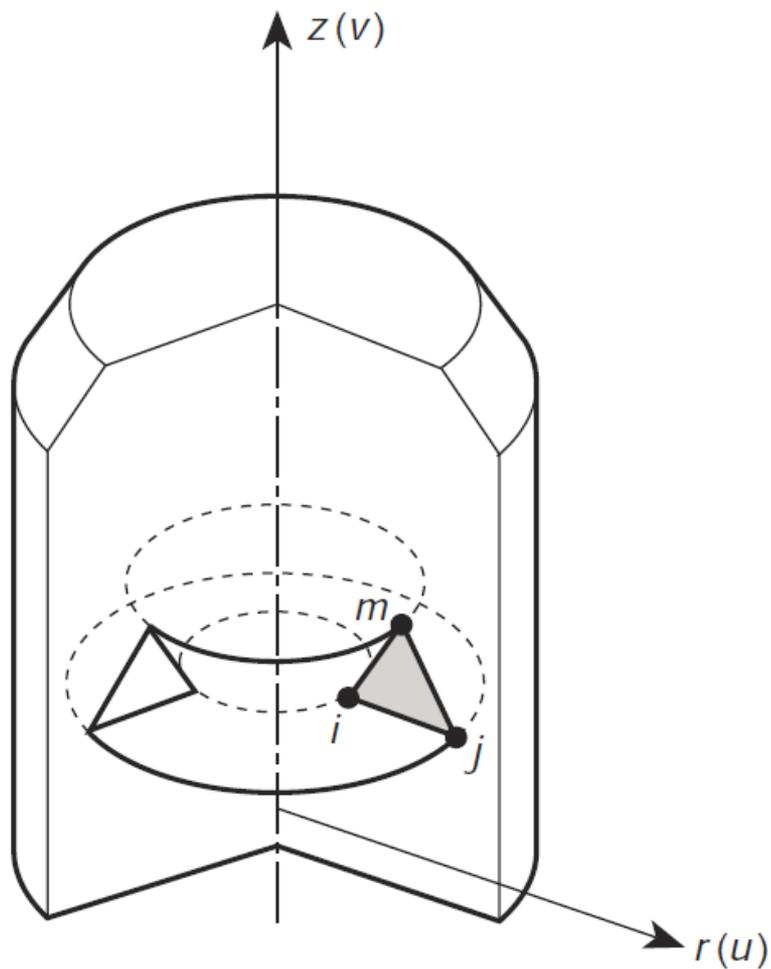
$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{a}}^T \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{P} \geq \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{P} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{P} \\ \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{P} \end{array}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{P} \leq \mathbf{a}^T \mathbf{P}$$

位移有限元的位移解整体上小于精确解，刚度整体上大于实际刚度。原因是有限元在离散过程中忽略了某些自由度，相当于施加了某些约束，从而使得整体响应偏刚。



轴对称问题



自己看，有问题讨论！



土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

公共邮箱

地址: fem_tongji@163.com

密码: youxiandanyuanfa

作业

王勖成《有限单元法》

P97——2.12

下节课交，抽样批改，计入总分，考试题型。



今天就到这里，
明天的事儿明天再说！

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院

