有限单元法研究生核心课程

第五讲 三维单元与等参单元

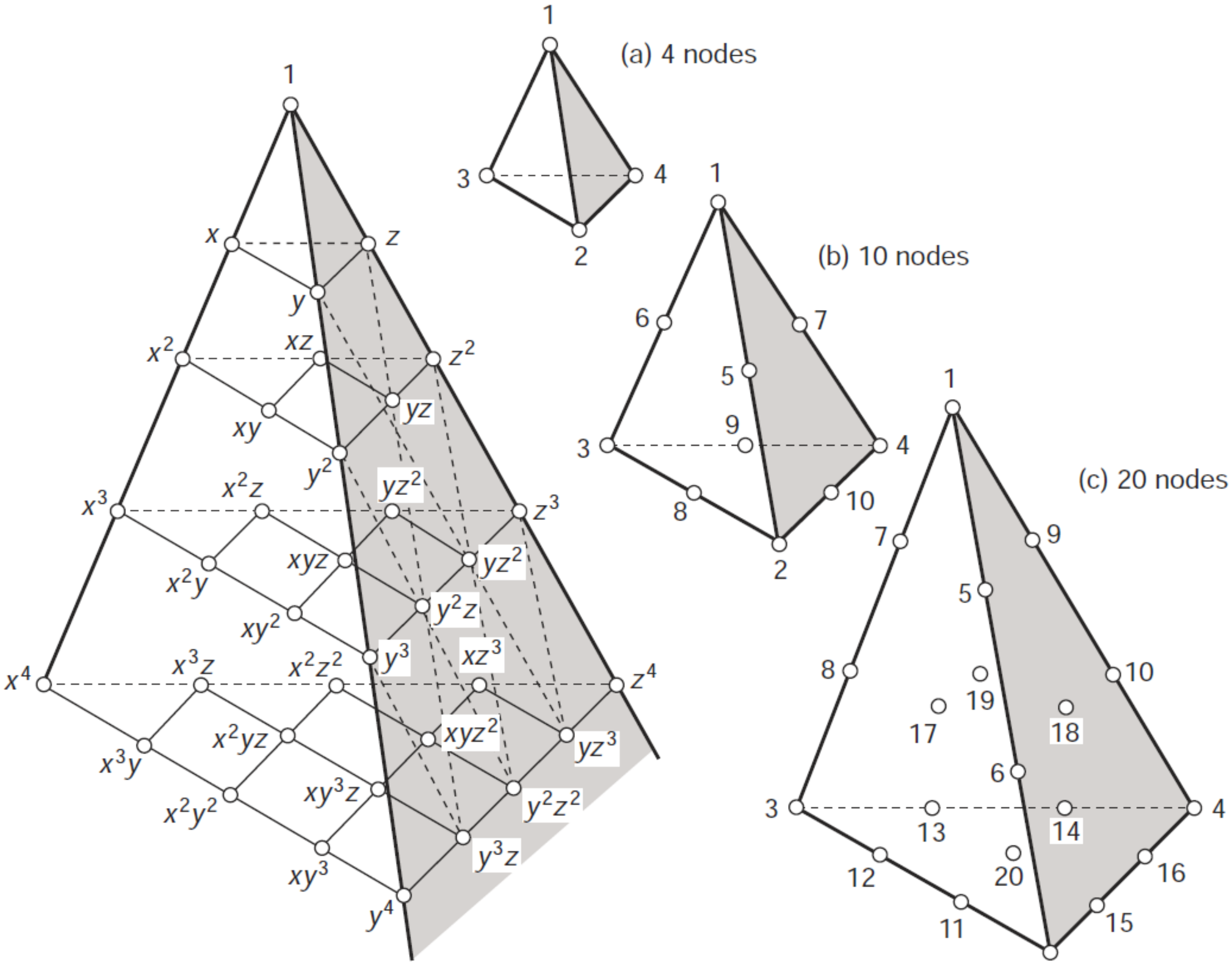
任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

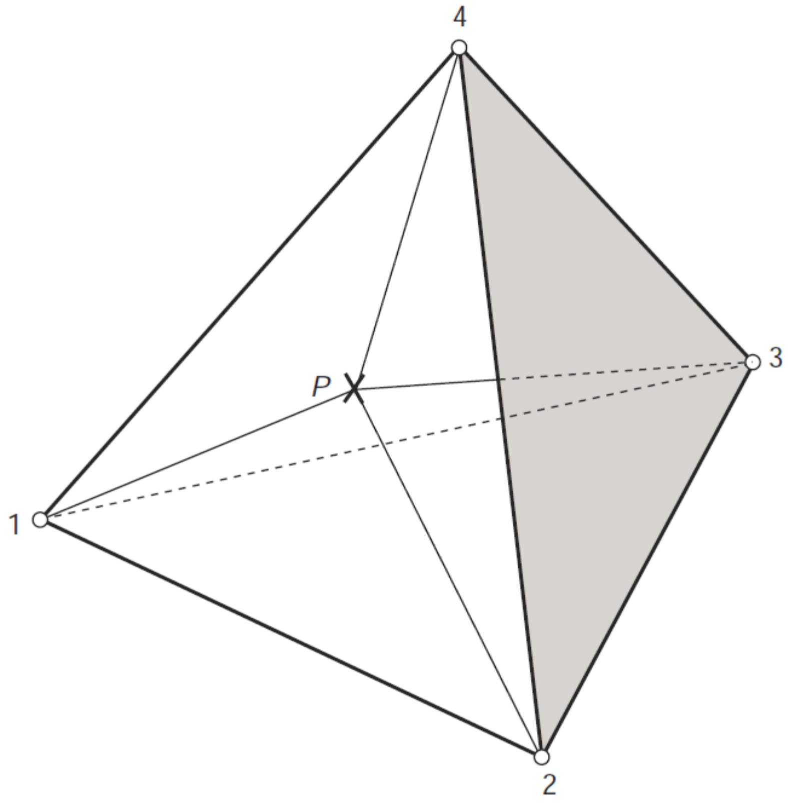
同济大学土木工程学院

三维单元

四面体单元（Tetrahedral elements）


1
x
z
y
x^2
xz
z^2
xy
yz
y^2
x^3
x^2z
yz^2
z^3
x^2y
xyz
yz^2
xy^2
y^2z
x^4
x^3z
x^2z^2
y^3
xz^3
z^4
x^3y
x^2yz
xyz^2
yz^3
x^2y^2
xy^3z
y^2z^2
xy^3
y^3z
y^4
(a) 4 nodes
1
2
3
4
(b) 10 nodes
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
(c) 20 nodes
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

四面体单元（Tetrahedral elements）



体积坐标

$$L_1 = \frac{\text{vol}(\text{P}234)}{\text{vol}(1234)} \qquad L_2 = \frac{\text{vol}(\text{P}134)}{\text{vol}(1234)}$$

$$L_3 = \frac{\text{vol}(\text{P}124)}{\text{vol}(1234)} \qquad L_4 = \frac{\text{vol}(\text{P}123)}{\text{vol}(1234)}$$

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

$$\text{vol}(ijkl) = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

四面体单元（Tetrahedral elements）

线性单元（4节点）： $N_i = L_i,\ i = 1, 2, 3, 4$

二次单元（10节点）： $N_i = (2L_i - 1)L_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ 角结点

$N_5 = L_1 L_2,\quad \text{etc.}$ 边内结点

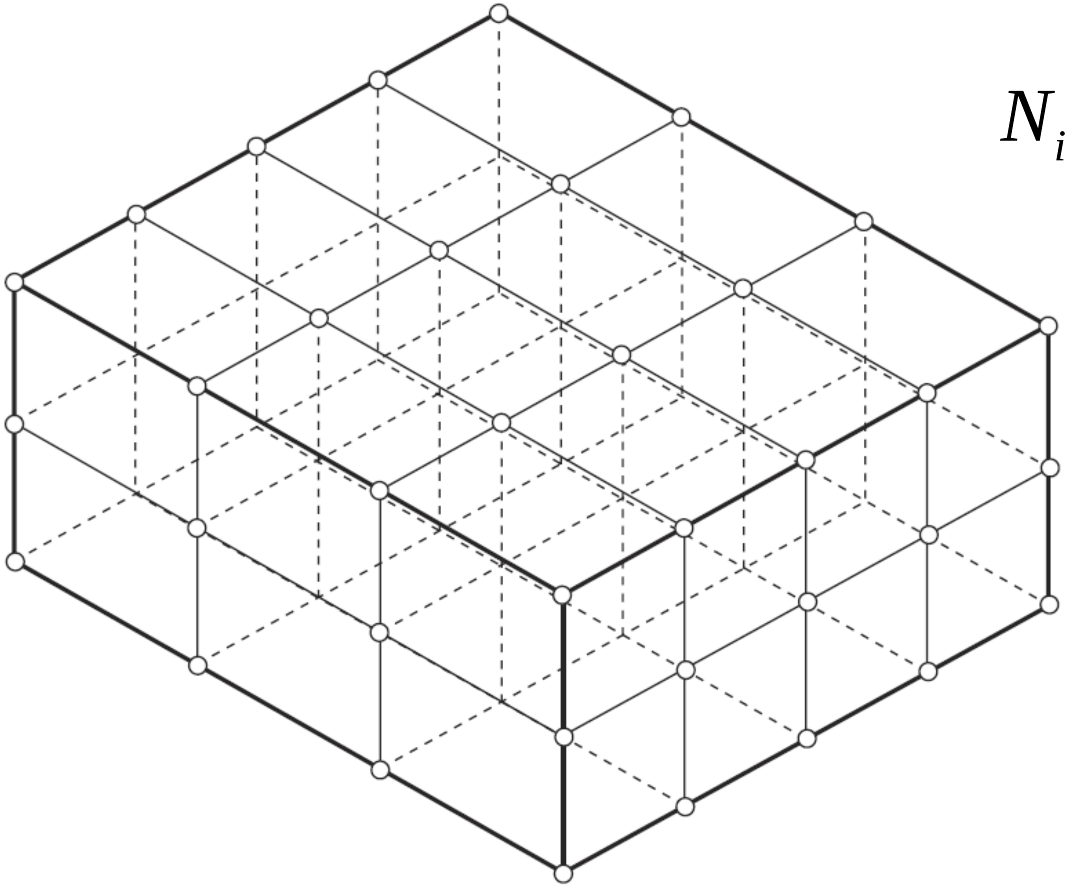
三次单元（20节点）：

$$N_i = \frac{1}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2)L_i,\ i = 1, 2, 3, 4$$ 角结点

$$N_5 = \frac{9}{2}L_1 L_2 (3L_1 - 1),\quad \text{etc.}$$ 边内结点

$$N_{17} = 27 L_1 L_2 L_3,\quad \text{etc.}$$ 面内结点

六面体单元（Hexahedral elements）

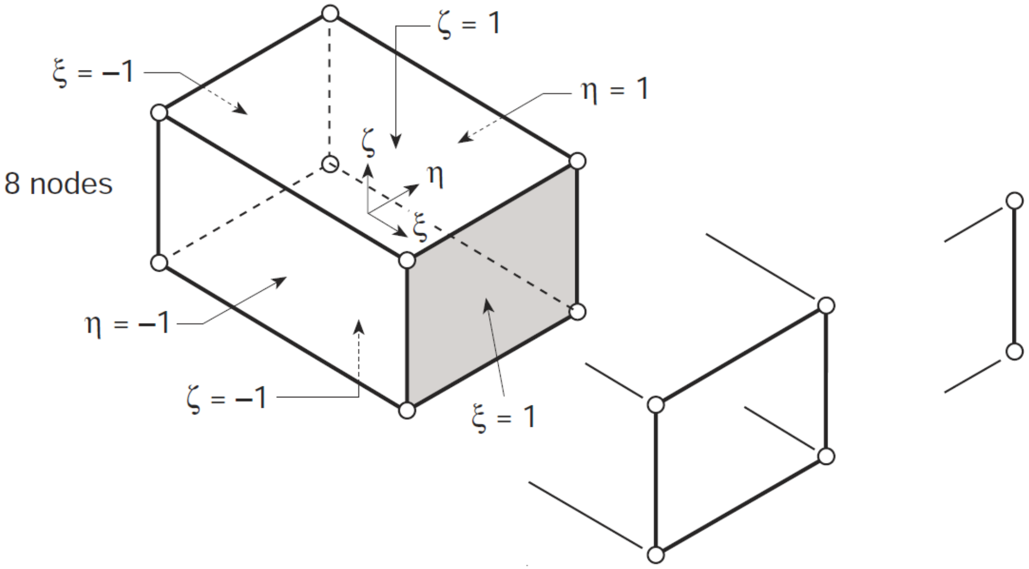


$$N_i = N_{IJK}$$

$$= l_I^{(m)}(\xi) l_J^{(n)}(\eta) l_K^{(p)}(\zeta)$$

拉格朗日单元

六面体单元（Hexahedral elements）


ξ = −1
ζ = 1
η = 1
8 nodes
ζ
η
ξ
η = −1
ζ = −1
ξ = 1

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$$

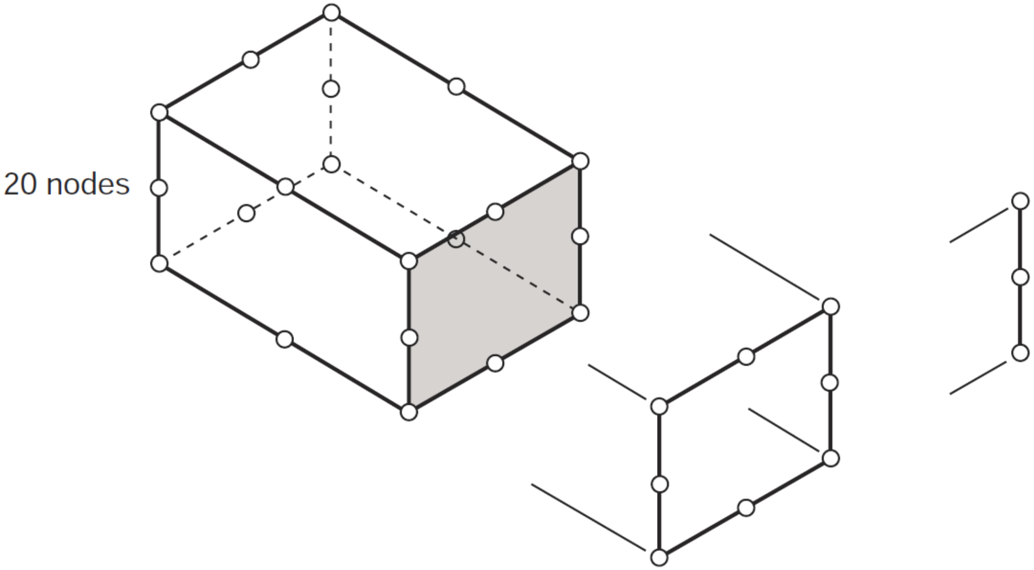
$$\xi_0 = \xi_i \xi$$

$$\eta_0 = \eta_i \eta$$

$$\zeta_0 = \zeta_i \xi$$

八结点单元

六面体单元（Hexahedral elements）



二十结点单元

角结点

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)\times$$

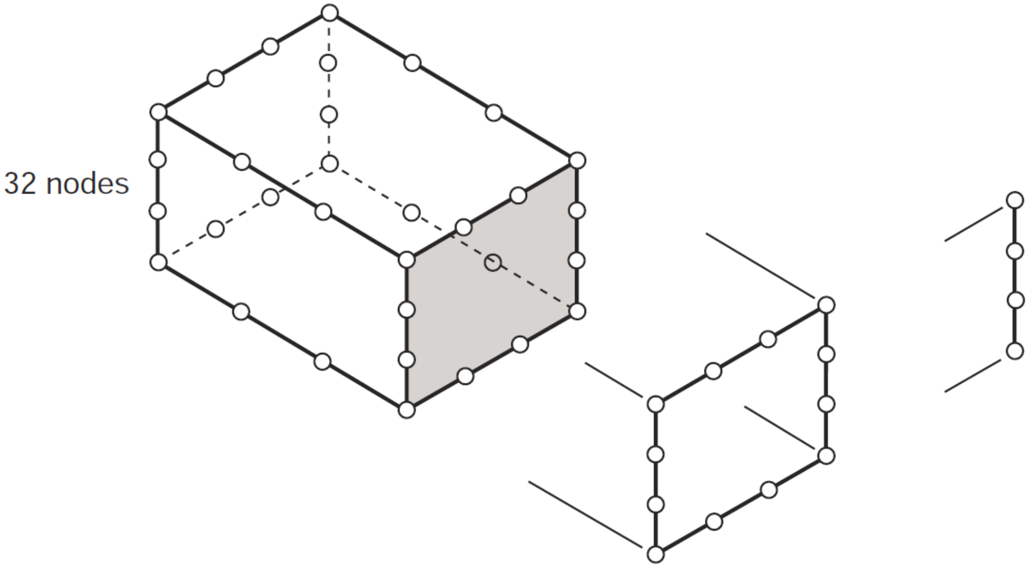
$$(\xi_0+\eta_0+\zeta_0-2)$$

边内结点

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$$

$$(\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1)$$

六面体单元（Hexahedral elements）



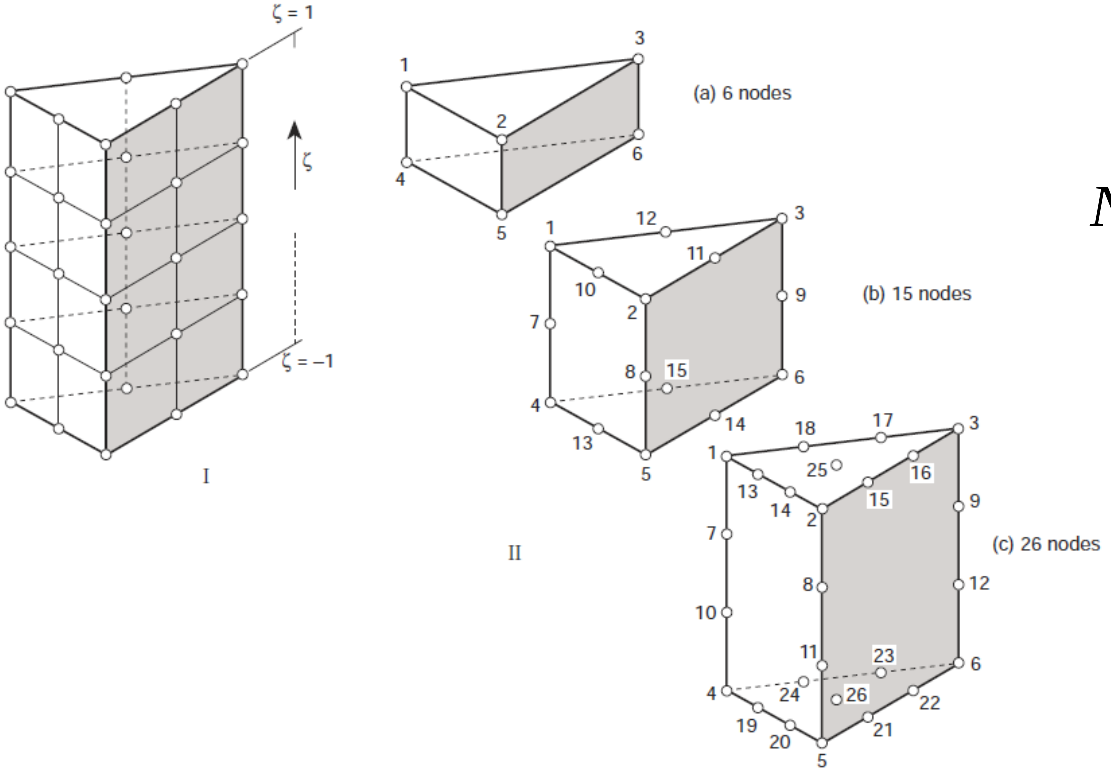
角结点

边内结点

面内结点

三十二结点单元

五面体单元（Wedge elements）


ζ = 1
ζ
ζ = −1
I
II
(a) 6 nodes
(b) 15 nodes
(c) 26 nodes
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

三角形单元×矩形单元

15结点单元为例：

角结点

$$N_1 = \tfrac{1}{2} L_1 (2L_1 - 1)(1+\zeta) - \tfrac{1}{2} L_1 (1-\zeta^2)$$

三角形边内结点

$$N_{10} = 2L_1 L_2 (1+\zeta)$$

四边形边内结点

$$N_7 = L_1 (1-\zeta^2)$$

阶谱单元

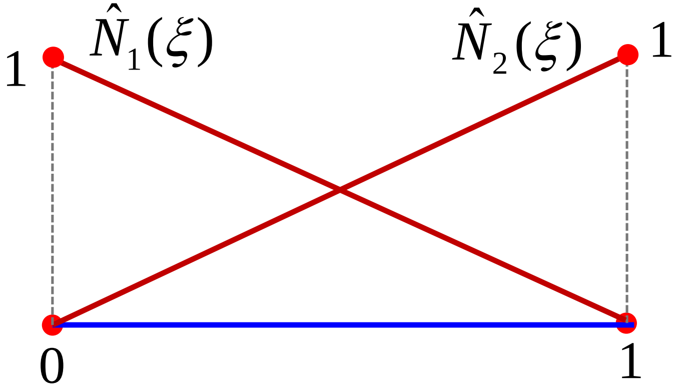
阶谱单元（hierarchical elements）

之前讨论的单元称为**标准单元**，它的各个结点参数具有明确的含义，即为函数在节点处的取值。

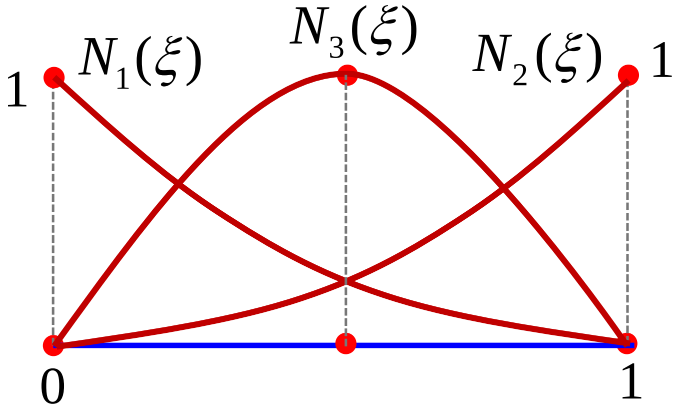
在有限元发展过程中，针对某些需求，可以构造结点参数并不一定具有明确含义、而计算可以保证收敛的单元。

阶谱单元即为这样一类单元，其初衷是考虑在自适应分析中，根据需求调整单元插值函数的精度，同时尽量保证已有的计算结果能够充分利用。

一维阶谱单元


$\hat{N}_1(\xi)$
$\hat{N}_2(\xi)$
1
1
0
1

$$\hat{N}_1(\xi)=\frac{1}{2}(1-\xi) \qquad \hat{N}_2(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi)$$


$N_1(\xi)$
$N_3(\xi)$
$N_2(\xi)$
1
1
0
1

$$N_1(\xi)=\hat{N}_1(\xi)-\frac{1}{2}N_3(\xi) \quad N_2(\xi)=\hat{N}_2(\xi)-\frac{1}{2}N_3(\xi)$$

$$\phi=\sum_{i=1}^{3}N_i(\xi)\phi_i=\sum_{i=1}^{3}H_i(\xi)a_i \qquad N_3(\xi)=1-\xi^2$$

$$H_1(\xi)=\hat{N}_1(\xi),\ H_2(\xi)=\hat{N}_2(\xi),\ H_3(\xi)=N_3(\xi)$$

$$a_1=\phi_1,\ a_2=\phi_2,\ a_3=\phi_3-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}$$

一维阶谱单元

二次形函数：$H_3(\xi)=1-\xi^2$　　$a_3=\phi_3-\dfrac{\phi_1+\phi_2}{2}$

三次形函数：$H_4(\xi)=\xi(1-\xi^2)$　　$a_4=\left.\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0}-\dfrac{\phi_2-\phi_1}{2}$

一类阶谱单元族：

$$H_i(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{(i-1)!}(\xi^{i-1}-1) & i=3,5,\ldots\ldots\\[2ex] \dfrac{1}{(i-1)!}(\xi^{i-1}-\xi) & i=4,6,\ldots\ldots\end{cases}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{j-1}H_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi^{j-1}}\right|_{\xi=0}=\begin{cases}0 & j=2,3,\ldots,i-2\\ 1 & j=i-1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_i=\left.\frac{\mathrm{d}^{i-1}\phi}{\mathrm{d}\xi^{i-1}}\right|_{\xi=0},\ i\geq 3$$

阶谱单元

阶谱刚度矩阵：

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(3)} & K_{14}^{(4)} & \cdots \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(4)} & \cdots \\ K_{32}^{(3)} & K_{31}^{(3)} & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(4)} & \cdots \\ K_{41}^{(4)} & K_{42}^{(4)} & K_{43}^{(4)} & K_{44}^{(4)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

二维、三维阶谱单元

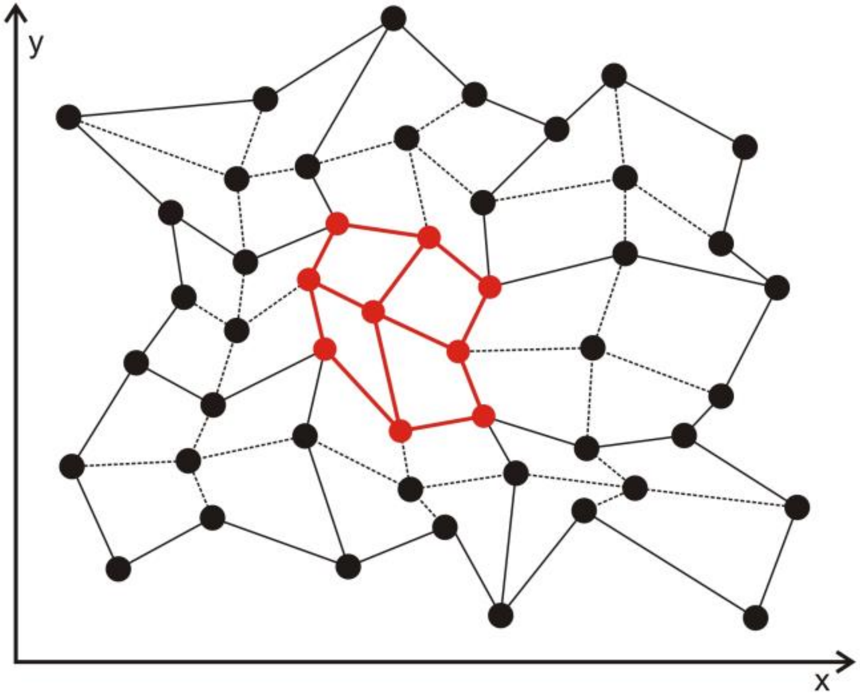
与一维阶谱单元思路类似，自己学习！

等参单元

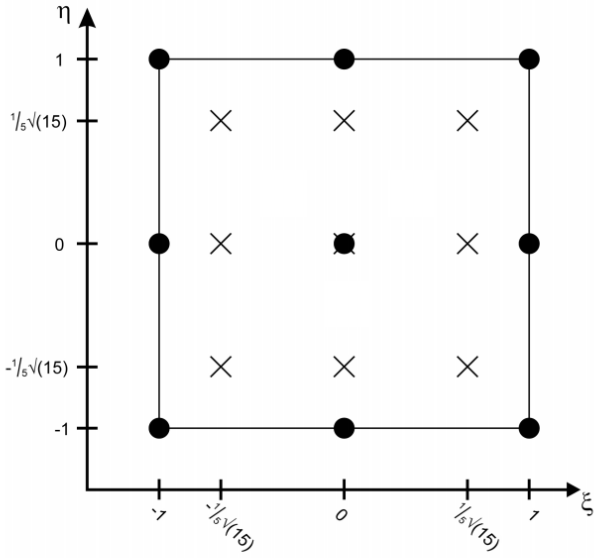
土木工程学院

COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

整体与局部



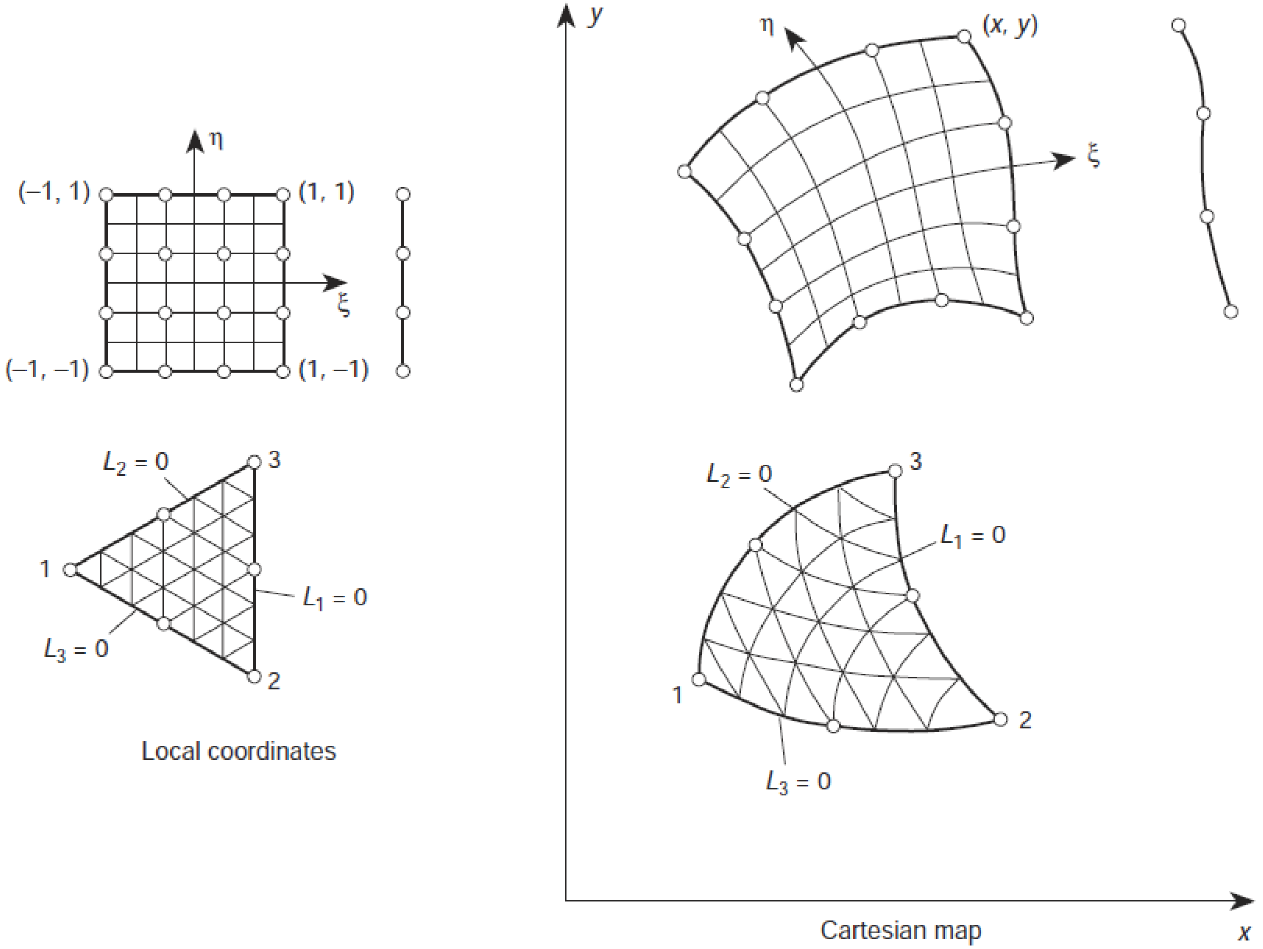
整体坐标系下网格划分


η
1
¹/₅√(15)
0
-¹/₅√(15)
-1
ξ
-1
-¹/₅√(15)
0
¹/₅√(15)
1

局部坐标系下规则单元

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

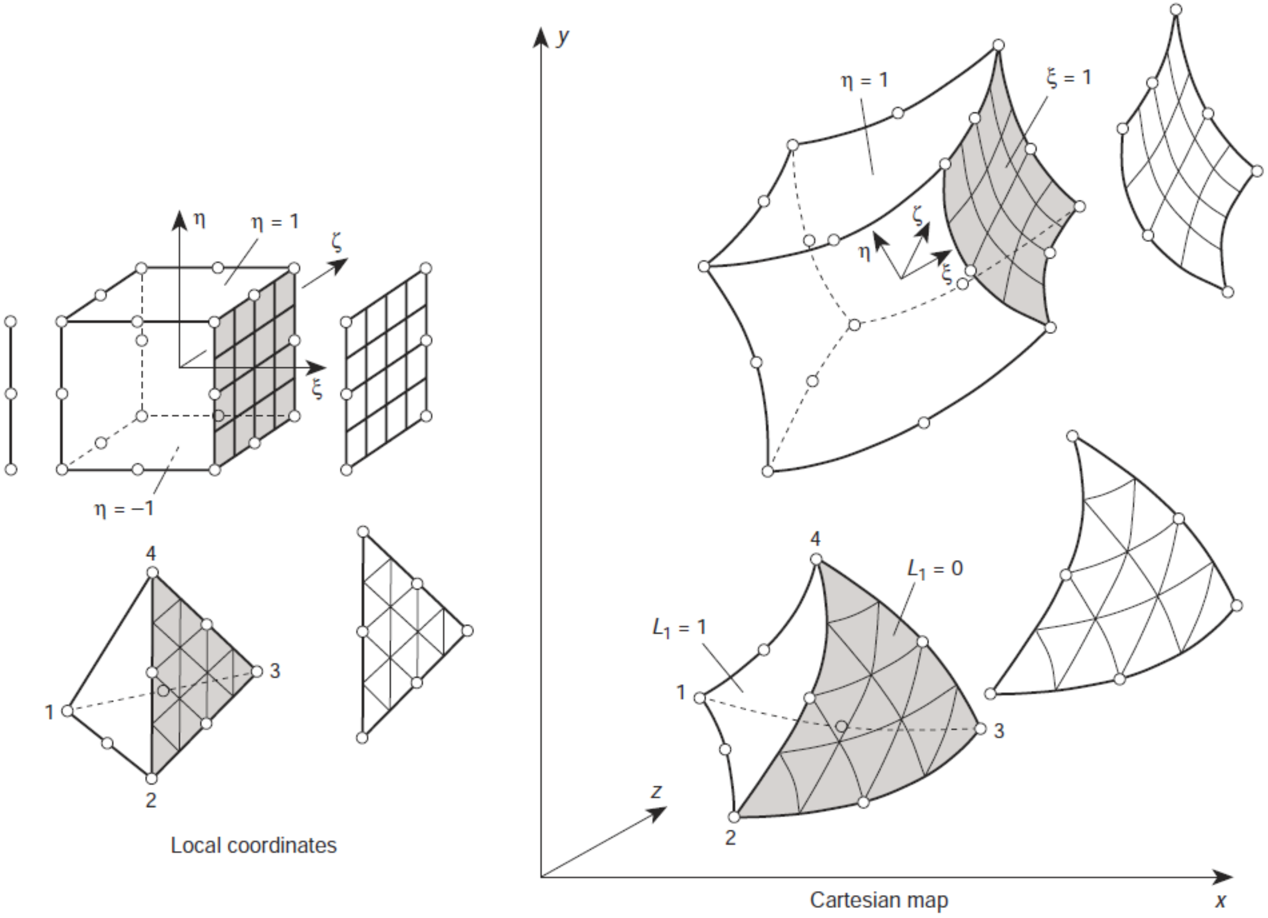
坐标变换


η
(−1, 1)
(1, 1)
ξ
(−1, −1)
(1, −1)
$L_2 = 0$
3
1
$L_1 = 0$
$L_3 = 0$
2
y
η
(x, y)
ξ
$L_2 = 0$
3
$L_1 = 0$
1
2
$L_3 = 0$
x

Local coordinates

Cartesian map

坐标变换


η
η = 1
ζ
ξ
η = −1
4
3
1
2
y
η = 1
ξ = 1
ζ
η
ξ
4
L₁ = 0
L₁ = 1
1
3
2
z
x

Local coordinates

Cartesian map

坐标变换

一般坐标变换：$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}\right) \text{ or } f\left(\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix}\right)$

利用有限元插值函数进行坐标变换：

$$x(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{m} N_i'(\xi,\eta,\zeta)x(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) = \sum_{i=1}^{m} N_i'(\xi,\eta,\zeta)x_i$$

$$y(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{m} N_i'(\xi,\eta,\zeta)y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) = \sum_{i=1}^{m} N_i'(\xi,\eta,\zeta)y_i$$

$$z(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{m} N_i'(\xi,\eta,\zeta)z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) = \sum_{i=1}^{m} N_i'(\xi,\eta,\zeta)z_i$$

等参元，超参元，亚参元。

$$x(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)x_i \qquad y(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)y_i$$

$$z(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)z_i$$

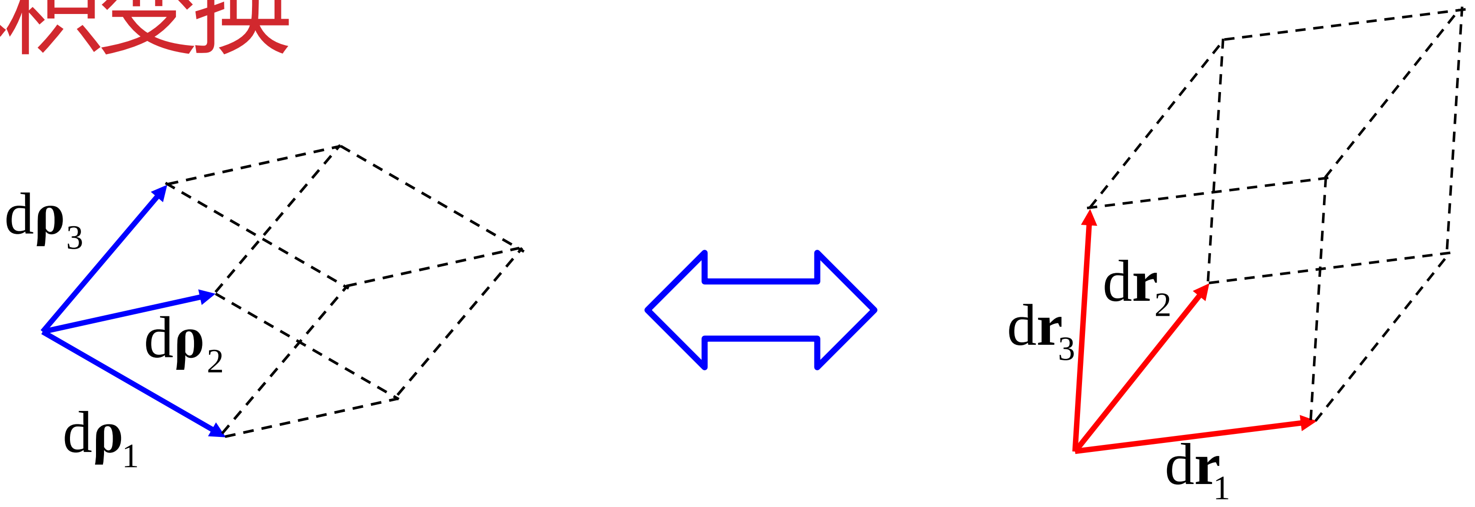
偏导数变换

$$\begin{bmatrix}\partial_\xi N_i\\ \partial_\eta N_i\\ \partial_\zeta N_i\end{bmatrix}=\mathbf{J}\begin{bmatrix}\partial_x N_i\\ \partial_y N_i\\ \partial_z N_i\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\partial_x N_i\\ \partial_y N_i\\ \partial_z N_i\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}\partial_\xi N_i\\ \partial_\eta N_i\\ \partial_\zeta N_i\end{bmatrix}$$

Jacobian matrix

$$\mathbf{J}\equiv\begin{bmatrix}\partial_\xi x & \partial_\xi y & \partial_\xi z\\ \partial_\eta x & \partial_\eta y & \partial_\eta z\\ \partial_\zeta x & \partial_\zeta y & \partial_\zeta z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial_\xi N_1' & \partial_\xi N_2' & \cdots & \partial_\xi N_m'\\ \partial_\eta N_1' & \partial_\eta N_2' & \cdots & \partial_\eta N_m'\\ \partial_\zeta N_1' & \partial_\zeta N_2' & \cdots & \partial_\zeta N_m'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_m & y_m & z_m\end{bmatrix}$$

体积变换



$\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_3$
$\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2$
$\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1$
$\mathrm{d}\mathbf{r}_2$
$\mathrm{d}\mathbf{r}_3$
$\mathrm{d}\mathbf{r}_1$

局部坐标系　　　　整体坐标系

一般体积变换：

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_2 \times \mathrm{d}\mathbf{r}_3 = \det \mathbf{J}\ \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_3$$

正交坐标系：

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\mathbf{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

体积分：

$$\int_\Omega G\,\mathrm{d}V = \iiint_\Omega G(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tilde{G}(\xi,\eta,\zeta)\,|\mathbf{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

面积变换与长度变换

面积变换：

$$\mathbf{n}\mathrm{d}A=\mathrm{d}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\partial_\xi x\\ \partial_\xi y\\ \partial_\xi z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\partial_\eta x\\ \partial_\eta y\\ \partial_\eta z\end{bmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \qquad \mathrm{d}A=\mathrm{L}_2\left(\begin{bmatrix}\partial_\xi x\\ \partial_\xi y\\ \partial_\xi z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\partial_\eta x\\ \partial_\eta y\\ \partial_\eta z\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

长度变换：

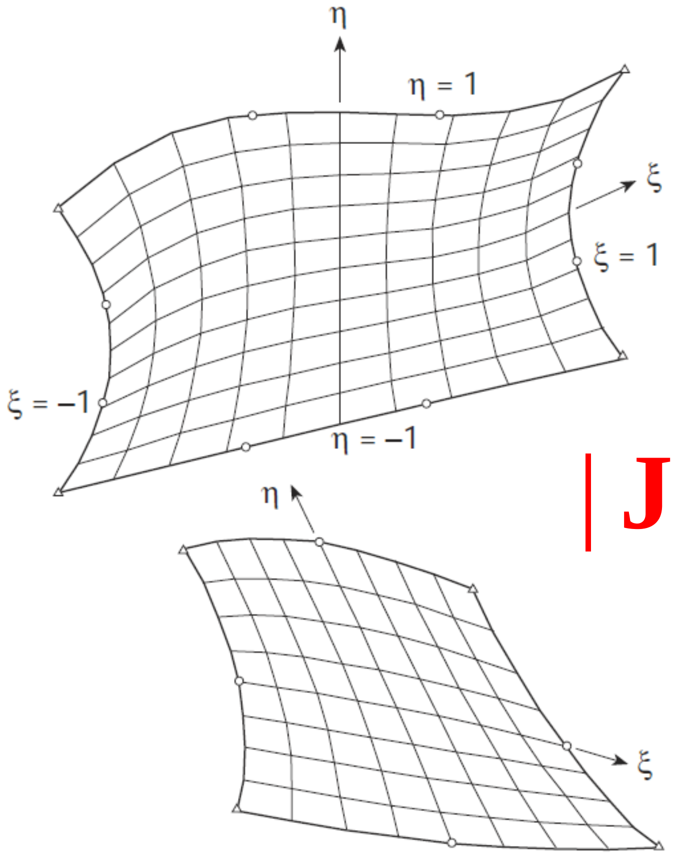
$$\mathbf{n}\mathrm{d}S=\mathrm{d}\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\partial_\xi x\\ \partial_\xi y\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{d}\xi=\begin{bmatrix}\partial_\xi y\\ -\partial_\xi x\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}\xi \quad \mathrm{d}S=\mathrm{L}_2\left(\begin{bmatrix}\partial_\xi y\\ -\partial_\xi x\\ 0\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}\xi=\sqrt{(\partial_\xi y)^2+(\partial_\xi x)^2}\,\mathrm{d}\xi$$

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

自然坐标为面积坐标

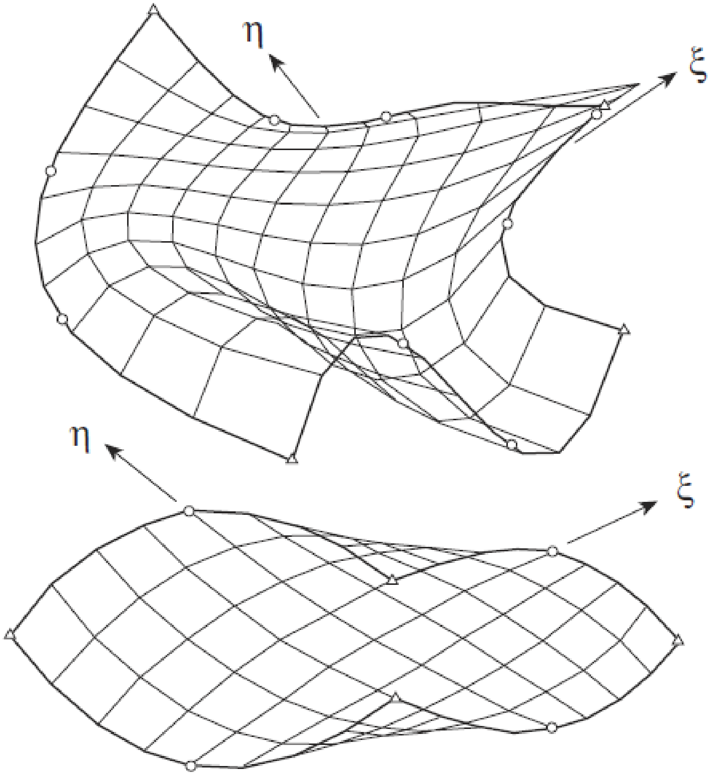
注意积分的上下限！

等参变换合理性


η
η = 1
ξ
ξ = 1
ξ = −1
η = −1
η
ξ

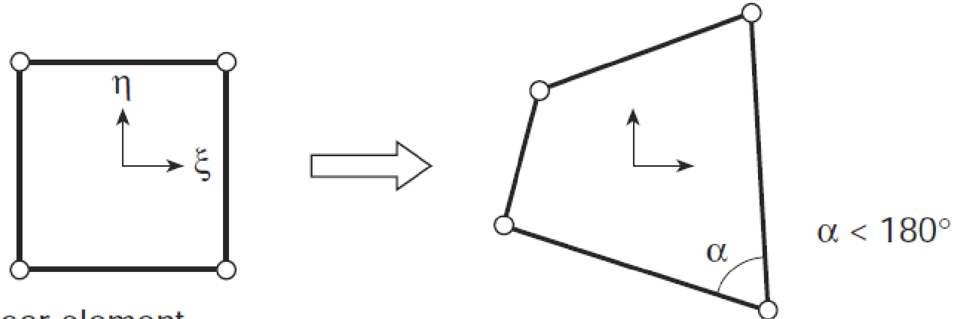
合理变换

$$|\mathbf{J}| \neq 0$$

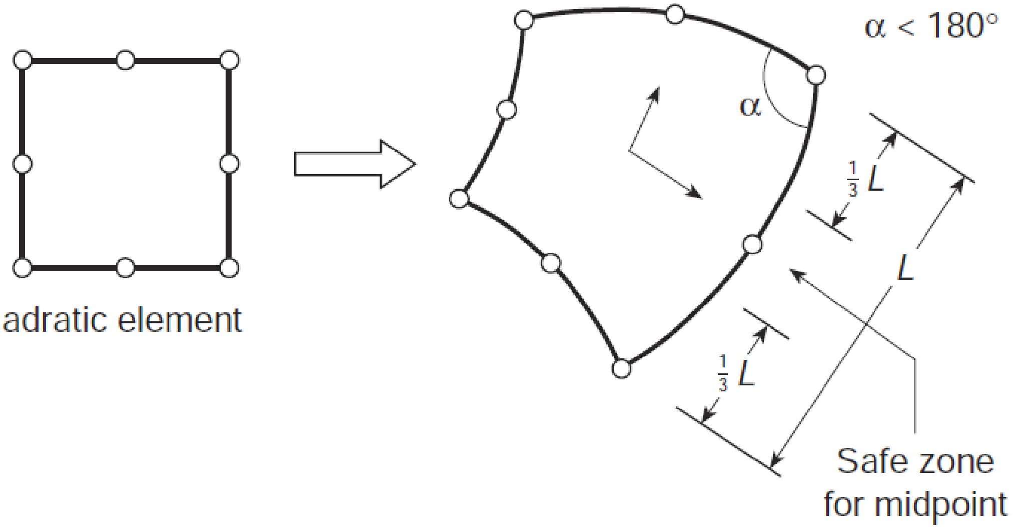


不合理变换（多值情况！）

合理等参变换的必要条件



(a) Linear element


α < 180°
α
$\frac{1}{3}L$
L
$\frac{1}{3}L$
Safe zone
for midpoint

(b) Quadratic element

1、角节点内角不得大于180度！

2、中节点应该在中间安全区域内！

等参元插值的性质

$$x(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i \quad y(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i \quad z(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)z$$

一般函数插值： $$\phi(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}N_i\phi_i=\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)\phi_i$$

一次项： $\phi(x,y,z)=x \text{ or } y \text{ or } z$ 自动满足！

常数项： $\phi(x,y,z)=C \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)=1$ 单位分解！

高次项： $\phi(x,y,z)=x^p y^q z^r \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i^p y_i^q z_i^r=x^p y^q z^r$

$$\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i^p y_i^q z_i^r=\left(\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i\right)^p\left(\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i\right)^q\left(\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta,\zeta)z_i\right)^r$$

大作业一（须提交分析报告）

对于函数：$\phi(x,y)=\sin x\cos y,\quad (x,y)\in[0,\pi/2]\otimes[0,\pi/2]$

完成以下计算。

1. 采用3节点、6节点三角形单元，4节点、8节点矩形单元，对函数进行插值，画出原函数-插值函数、原函数导数-插值导数的图形，并讨论计算结果。（插值网格取1×1，2×2，5×5，三角形单元在矩形单元中采用对角线斜跨划分即可。）
2. 计算原函数插值和插值导数的2-范数误差，将误差-单元长度（E-h）曲线绘制在双对数坐标系中，观察和讨论计算所得曲线的性质。（至少变化5个单元长度，跨过3个长度量级，才可能得到稳定且有规律的结果。）

$$\left\| f-\hat{f} \right\|_2=\left[\int_\Omega \left(f-\hat{f}\right)^2 \mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}}$$

4月20日提交！

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

公共邮箱

地址：fem_tongji@163.com

密码：youxiandanyuanfa

今天就到这里，

明天的事儿明天再说！

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院