

第七讲 非协调元与分片试验

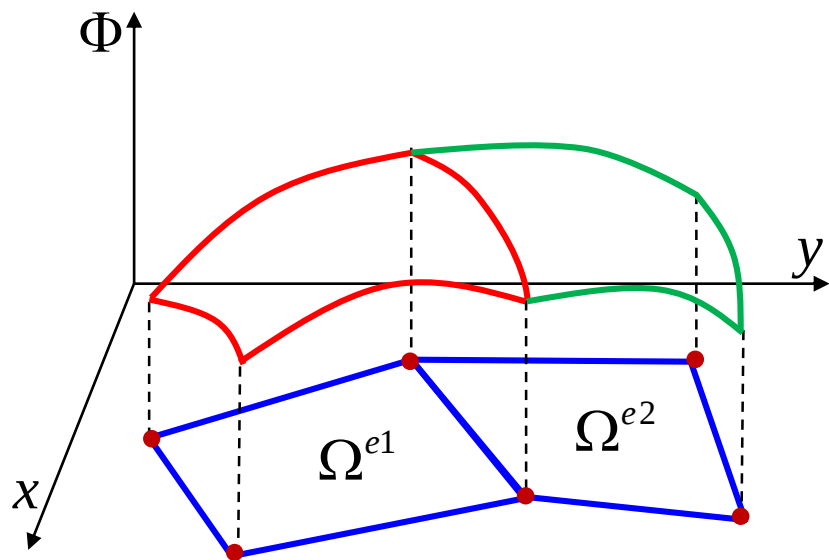
任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

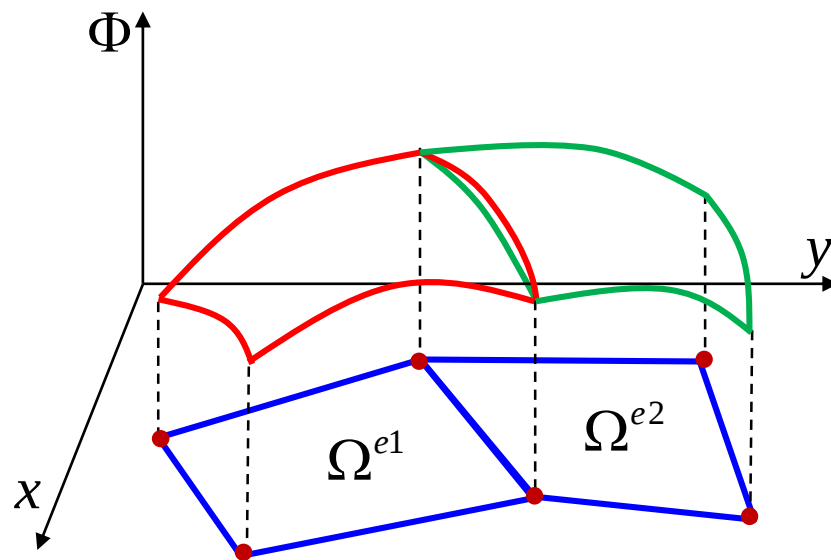
同济大学土木工程学院



协调元与非协调元



协调元
Conforming element

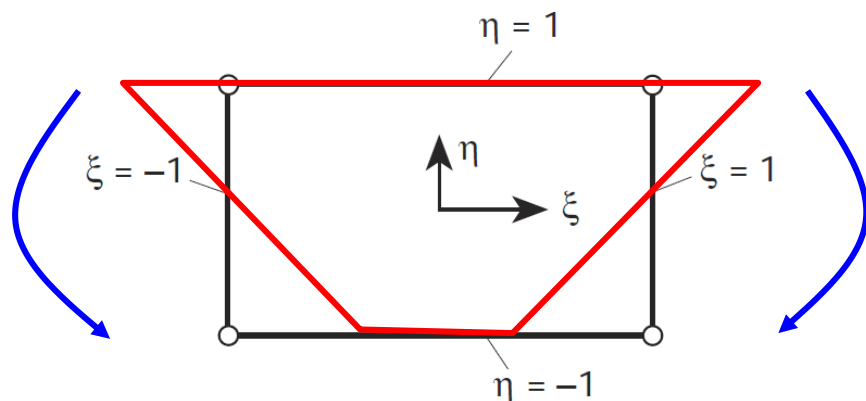


非协调元
Non-conforming element

判断条件：单元间相邻边的函数插值是否完全由本边上的节点决定，**或**不在本边的节点形函数是否在本边上恒为零。



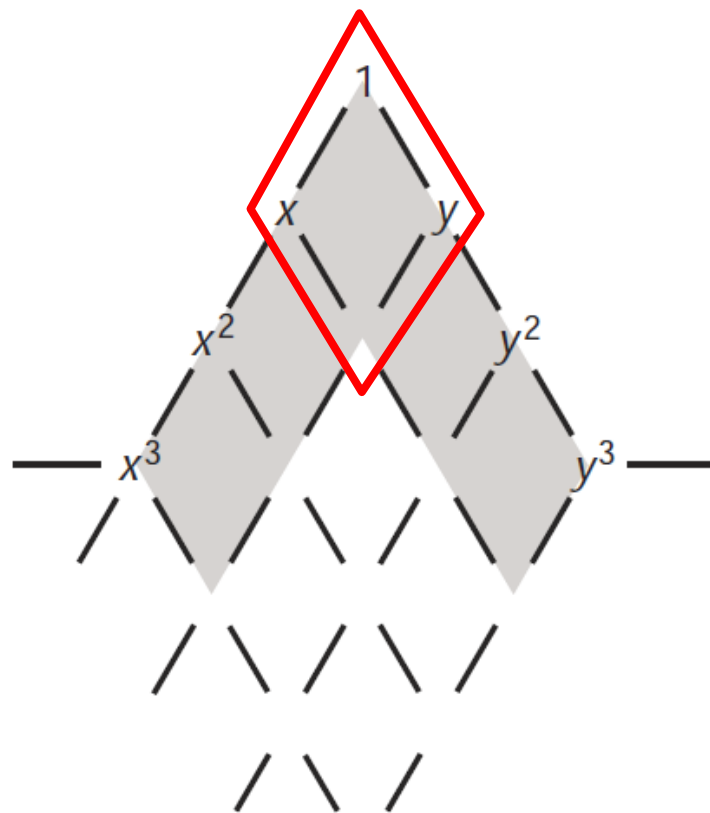
WILSON非协调元



$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

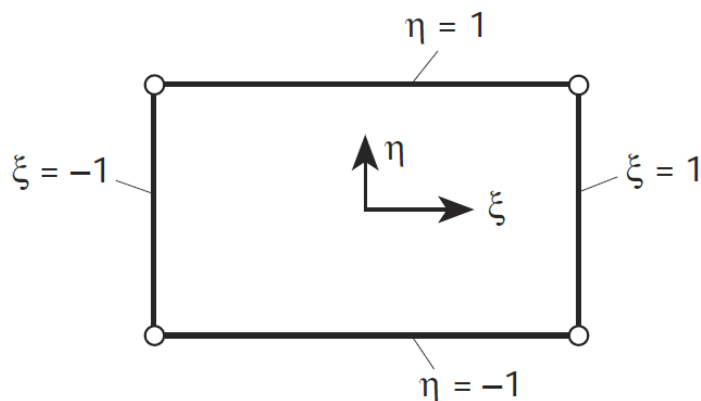
一般平面四节点单元



不完全二阶项



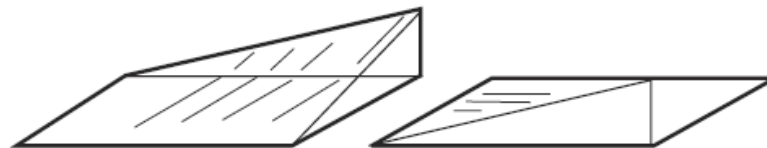
WILSON非协调元



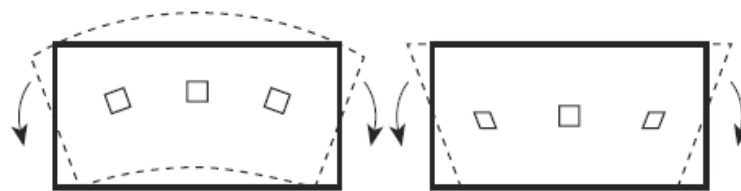
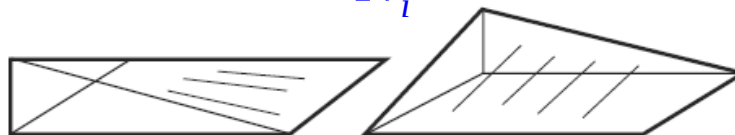
$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + \alpha_1(1-\xi^2) + \alpha_2(1-\eta^2)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + \alpha_3(1-\xi^2) + \alpha_4(1-\eta^2)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$



N_i



模拟弯曲变形模式

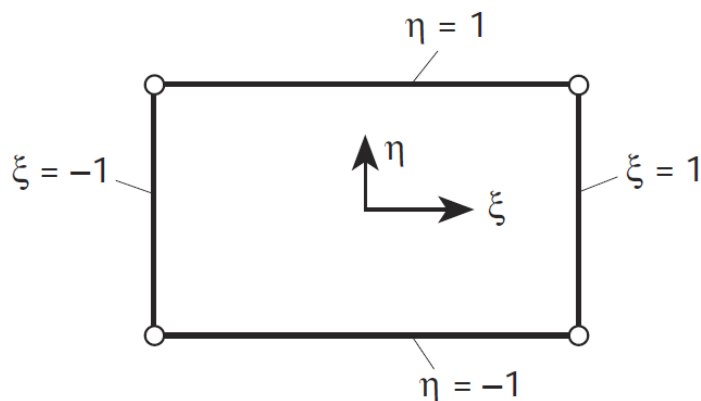


$\bar{N}_i$



土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

WILSON非协调元

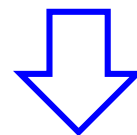


$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + \alpha_1 (1 - \xi^2) + \alpha_2 (1 - \eta^2)$$

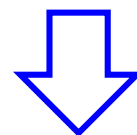
$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + \alpha_3 (1 - \xi^2) + \alpha_4 (1 - \eta^2)$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a}^e + \bar{\mathbf{N}} \bar{\boldsymbol{\alpha}}^e$$



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}^e + \bar{\mathbf{B}} \bar{\boldsymbol{\alpha}}^e$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{u\alpha}^e \\ \mathbf{K}_{\alpha u}^e & \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^e \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u^e \\ \mathbf{P}_\alpha^e \end{bmatrix}$$



WILSON非协调元

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{u\alpha}^e \\ \mathbf{K}_{\alpha u}^e & \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^e \\ \boldsymbol{\alpha}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u^e \\ \mathbf{P}_\alpha^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

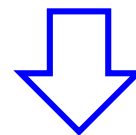
$$\mathbf{K}_{\alpha u}^e = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} d\Omega$$

$$\mathbf{P}_u^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_s^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Omega$$

$$\mathbf{P}_\alpha^e = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_s^e} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} d\Omega$$

$$\boldsymbol{\alpha}^e = \left(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \right)^{-1} \left(\mathbf{P}_\alpha^e - \mathbf{K}_{\alpha u}^e \mathbf{a}^e \right)$$



$$\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e = \mathbf{P}^e$$

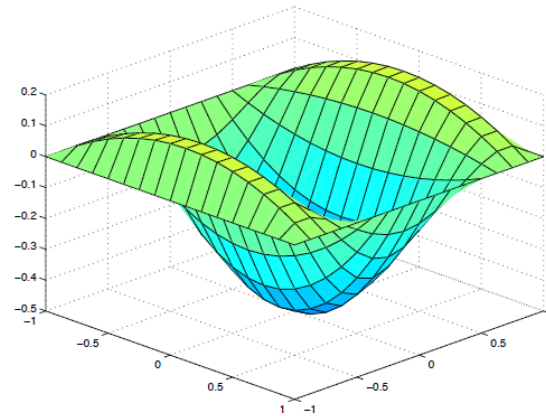
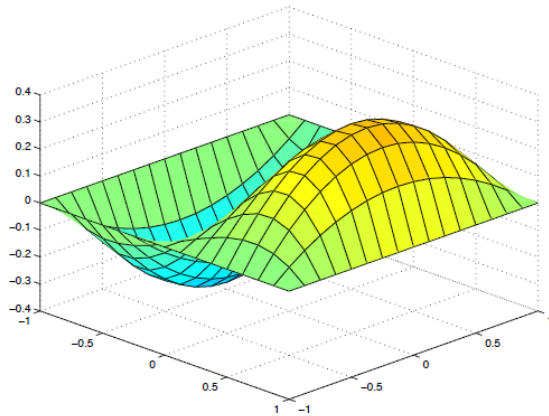
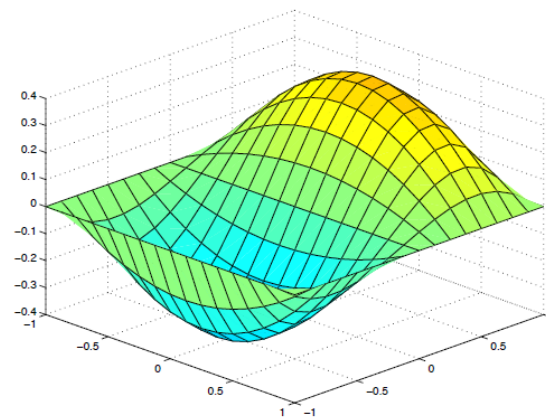
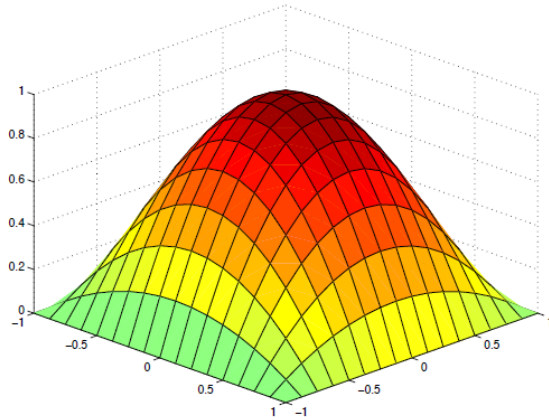
$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{uu}^e - \mathbf{K}_{u\alpha}^e \left(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \right)^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u}^e$$

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{P}_u^e - \mathbf{K}_{u\alpha}^e \left(\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \right)^{-1} \mathbf{P}_\alpha^e$$

自由度凝聚！



BUBBLE FUNCTIONS



合理运用Bubble functions可以在不改变单元协调性的基础上改进单元的精度。

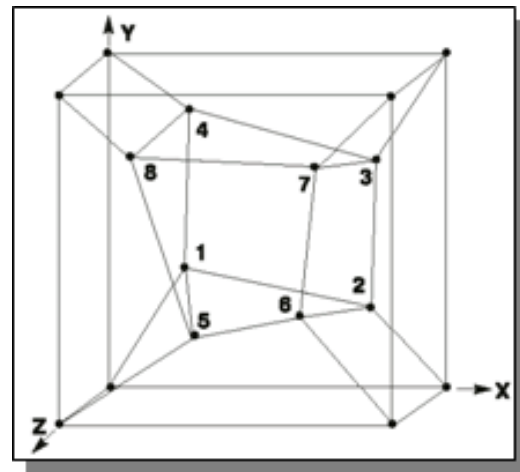
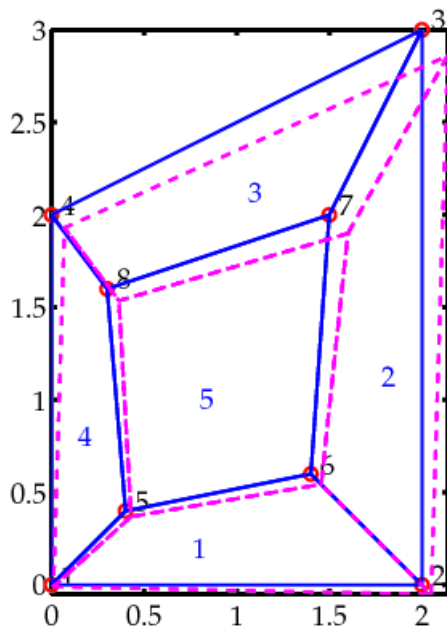
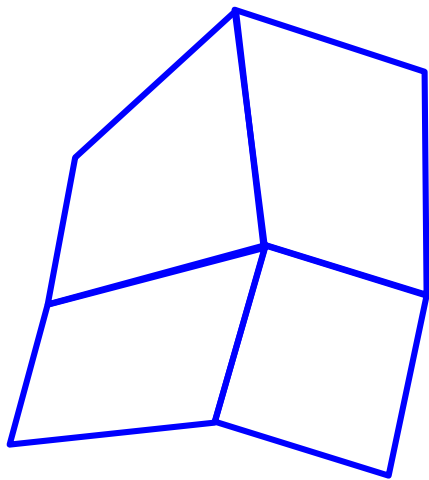


非协调元若干评价

- 由于附加自由度的形函数在单元边界处不等于零，进而导致了单元边界的插值结果与非边界自由度有关，以此构造的单元相邻单元边界上的变形即会发生不协调。
- 非协调元破坏了单元间的C0连续性条件，不符合常规单元的收敛性条件，但计算实践表明有些非协调元仍能得到收敛的计算结果。
- 由于非协调元的非协调性相当于放松了结构内部的约束，非协调元有时甚至会得到优于协调元的结果。
- 此类非协调元的收敛性来源于当 $h \rightarrow 0$ 时单元趋于协调。
- 需要一种方法来判断有限元模型的收敛性，或者至少对有限元模型进行一个具有工程意义的评价。



分片试验 (**PATCH TEST**)



有限元单元法中，分片 (patch) 是指同时包含边节点和内部节点的单元组。

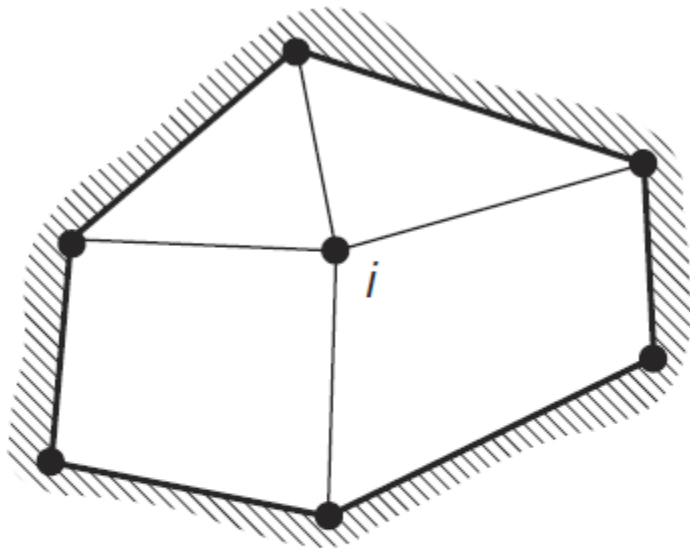


分片试验 (**PATCH TEST**)

- 分片试验最早由Bruce Irons提出，作为**评价有单元模型质量的简单指标**。
- 分片试验的操作过程就是**验证有限元分片是否能（精确）模拟微分方程的（简单）精确解**。单元分片（在 $h \rightarrow 0$ 时）如果能精确再现方程的（简单）精确解，则称单元通过对应分片试验。
- 在固体力学分析中，一般验证**有限元分片是否能够精确模拟线性位移场（常应变场）**。当然，也有所谓高阶分片试验。
- 严格讲，通过（物理）分片试验**既非有限元模型收敛的充分条件也非必要条件**。但是由于操作简单，含义直观，工程分析中还是习惯于采用分片试验评价有限元模型的质量。

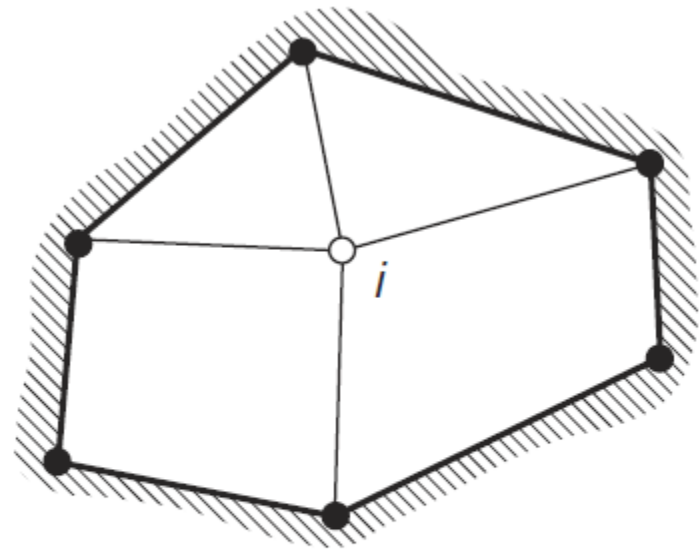


分片试验 (**PATCH TEST**)



Test A

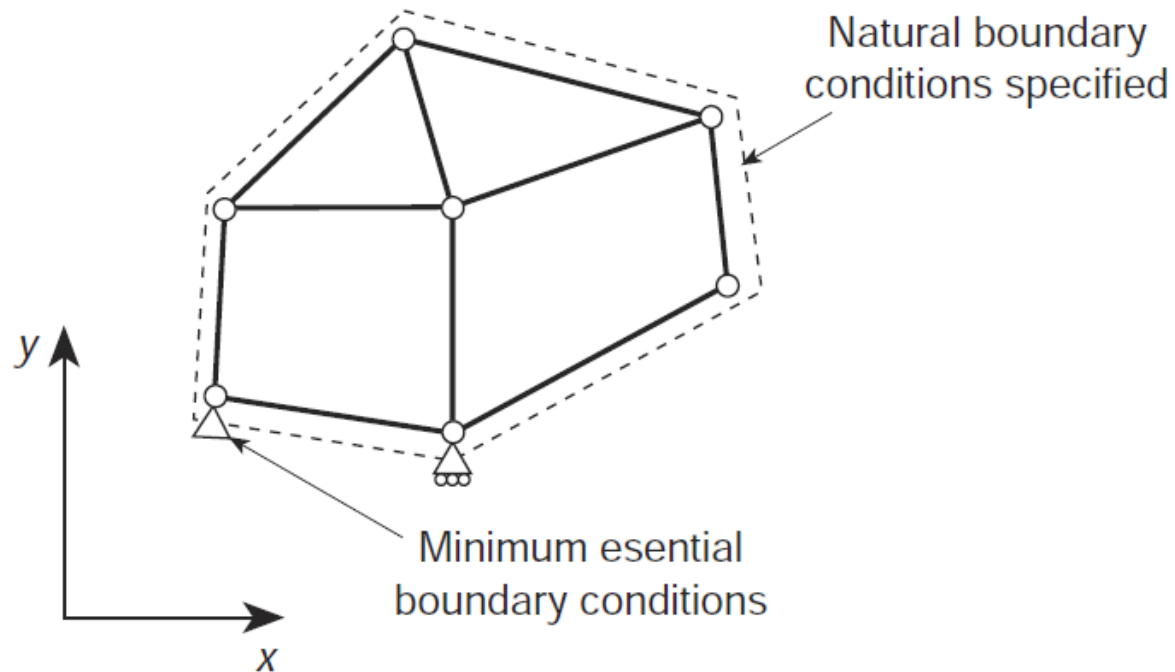
$\mathbf{a}$ prescribed on all nodes
 $\mathbf{K}_{ij}\mathbf{a}_j = \mathbf{f}_i$ verified at node i



Test B

$\mathbf{a}$ prescribed at edges of patch
 $\mathbf{a}_i = \mathbf{K}_{ii}^{-1} (\mathbf{f}_i - \mathbf{K}_{ij}\mathbf{a}_j) \ (j \neq i)$ solved

分片试验 (**PATCH TEST**)



Patch test of form C.



分片试验 (**PATCH TEST**)

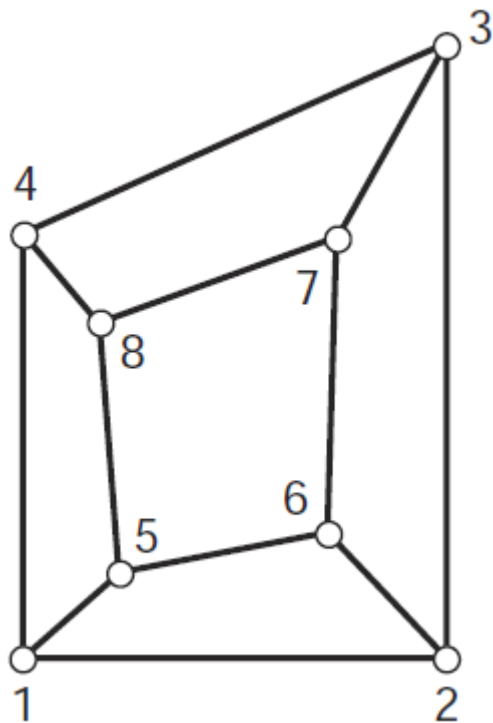
(物理) 分片试验示例

$$u = 0.002x$$

$$v = -0.0006y$$

$$\sigma_x = 2$$

分片试验结果：与预设解一致



Node i	Coordinates		Computed displacements		Forces	
	x_i	y_i	u_i	v_i	F_{x_i}	F_{y_i}
1	0.0	0.0	0.0	0.0	-2	0
2	2.0	0.0	0.0040	0.0	3	0
3	2.0	3.0	0.0040	-0.00186	2	0
4	0.0	2.0	0.0	-0.00120	-3	0
5	0.4	0.4	0.0008	-0.00024	0	0
6	1.4	0.6	0.0028	-0.00036	0	0
7	1.5	2.0	0.0030	-0.00120	0	0
8	0.3	1.6	0.0006	-0.00096	0	0

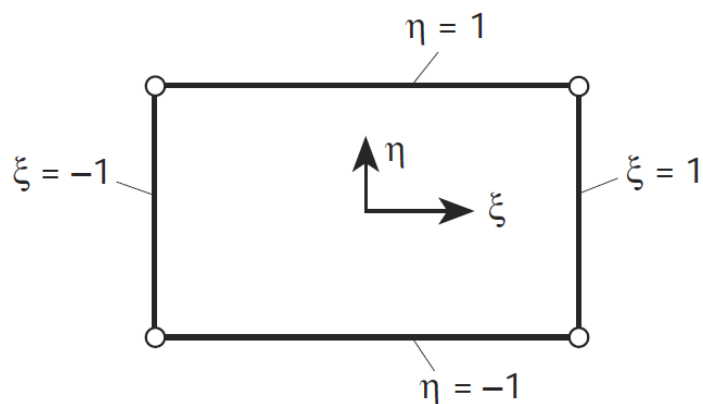
若采用减缩积分单元，Test C将出现刚度矩阵奇异。

四节点全积分单元分片



分片试验 (PATCH TEST)

非协调元分片试验

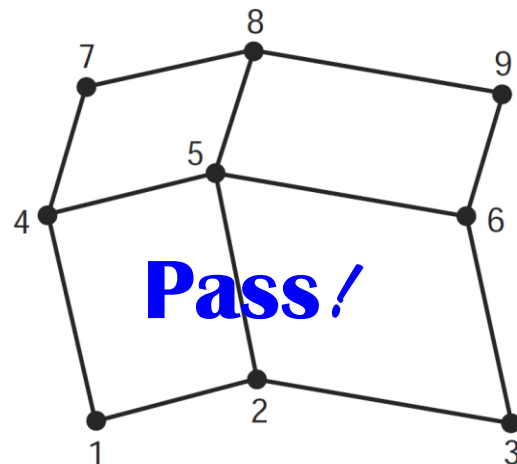
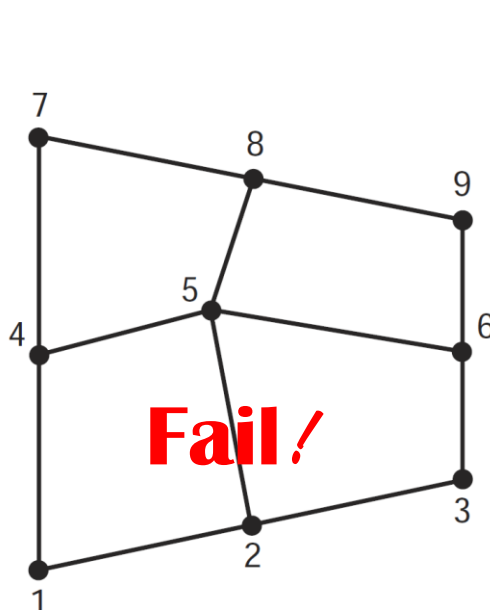
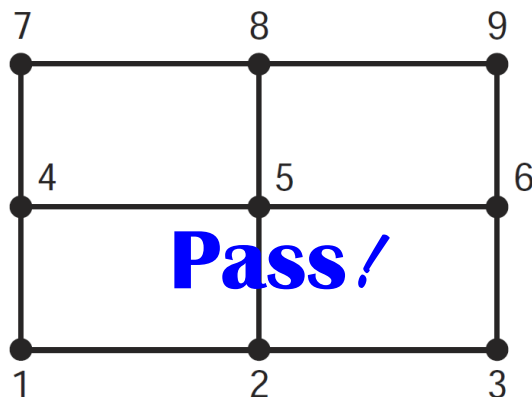


$$u = \sum_{i=1}^7 N_i u_i + \alpha_1 (1 - \xi^2) + \alpha_2 (1 - \eta^2)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + \alpha_3 (1 - \xi^2) + \alpha_4 (1 - \eta^2)$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)$$

Wilson非协调元



分片试验 (**PATCH TEST**)

非协调元分片试验

对于 (Wilson) 非协调元, 由于基础形函数能够通过分片试验, 这里只要保证在线性位移场 (常应变场) 的作用下, 附加非协调自由度对应幅值为0, 即可通过 (第二类) 分片试验。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{K}_{u\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e &= \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e &= -\mathbf{K}_{\alpha u}^e \mathbf{a}^e \\ \mathbf{K}_{\alpha u}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e &= \mathbf{0} & &= -\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^e d\Omega = \left(\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T d\Omega \right) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^e \end{aligned}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^e \text{ 任意 } \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \text{ 可逆 } \boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{0} \iff \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T d\Omega = \mathbf{0}$$

$$\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T | \mathbf{J} | dx dy$$

线性 常数



分片试验 (PATCH TEST)

对于非协调元的第三类分片试验，须考虑面力（不失一般性忽略体力）：

$$\mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{K}_{u\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{P}_u^e \quad \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{a}^e + \mathbf{K}_{u\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e = \int_{\Gamma_s^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{\alpha u}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{P}_\alpha^e \quad \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{a}^e + \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e = \int_{\Gamma_s^e} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} d\Omega$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T d\Omega \bar{\boldsymbol{\sigma}}^e + \mathbf{K}_{u\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e &= \int_{\Gamma_s^e} \mathbf{N}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}^e \mathbf{n} d\Omega & \int_{\Gamma_s^e} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{n} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T d\Omega \bar{\boldsymbol{\sigma}}^e + \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \boldsymbol{\alpha}^e &= \int_{\Gamma_s^e} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}^e \mathbf{n} d\Omega & \int_{\Gamma_s^e} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{或}$$

（常）面力在非协调形函数上的作用量须消除或者忽略！



分片试验 (**PATCH TEST**)

分片试验的数学表达:

$$\left\{ \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega \right] \right\} \mathbf{d} = \mathbf{A} \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_s} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t} d\Gamma$$

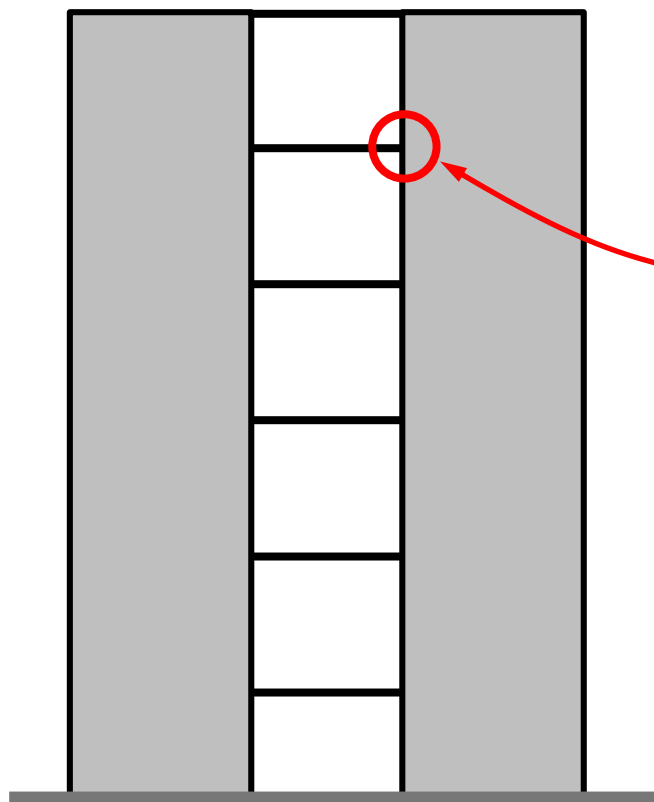
任意常应力场: $\left\{ \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T d\Omega \right] \right\} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^e = \left[\mathbf{A} \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_s} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{n} d\Gamma \right] \bar{\boldsymbol{\sigma}}^e$

离散高斯定理: $\mathbf{A} \int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^e d\Omega = \mathbf{A} \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_s} \mathbf{N}^e \mathbf{n} d\Gamma$

数值积分离散高斯定理: $\mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^{n_q} \nabla \mathbf{N}_i^e w_i | \mathbf{J}_i | \right) = \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^{n_{qh}} \mathbf{N}_i^e \mathbf{n} w_i | \mathbf{J}_i | \right)$



结构工程中的典型应用



常规平面单元在与梁连接
节点不具有转角协调

附加节点转动自由度的平
面单元构成非协调元！



公共邮箱

地址: **fem_tongji@163.com**

密码: **youxiandanyuanfa**



今天就到这里，
明天的事儿明天再说！

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院

