

# 新、旧规范建议混凝土单轴本构关系之讨论

李杰, 任晓丹, 曾莎洁

(同济大学土木工程学院, 上海 200092)

**摘要:** 本文以旧版《混凝土结构设计规范》(GB50010-2002) 建议混凝土单轴受力本构关系为基础, 采用损伤的视角, 对规范给出的单轴本构关系进行等价变换, 并对变换后的单轴本构关系进行讨论。最后, 在损伤演化的基础上, 对旧版规范中建议的单轴应力应变关系引入若干改进, 得到混凝土单轴受拉和受压本构关系的统一表达式, 使之更适合于描述复杂受力状态和多维损伤演化。模型结果与实验结果以及 benchmark 算例结果的对比验证了新模型的正确性和有效性。新版《混凝土结构设计规范》(GB50010-2010) 所采用混凝土单轴本构关系的建立即是依据本文思路完成的。

**关键词:** 本构关系, 损伤演化, 混凝土, 混凝土结构设计规范

中图分类号: TH133

## Discussions on Uniaxial Constitutive Relationship of Concrete Proposed by Design Codes

LI Jie, REN Xiaodan, ZENG Shajie

(Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Efforts are made in this paper to develop the reasonable expression for the uniaxial constitutive relationship of concrete material. Firstly, the equivalent damage expression is proposed based on the stress-strain relationship of concrete proposed in the Reinforced Concrete Design Code (GB50010-2002). Then the obtained damage expression is revised by introducing the thermo-dynamical requirement of the damage evolution. The agreement between the model results and the experimental data indicates the validation of the proposed model. And the uniaxial stress-strain relationship proposed in the new version of the design code was developed based on the methods proposed in the present paper.

**Key words:** constitutive relationship, damage model, concrete, Reinforced Concrete Design Code

在最近 50 年中, 伴随着计算力学的发展和电子计算机的普及, 混凝土结构非线性分析在经历了长时间的摸索以后取得了一系列标志性的成果。在研究的过程中人们逐渐认识到, 混凝土结构非线性分析的研究的核心在于混凝土本构关系的研究, 混凝土本构关系的研究也构成了混凝土结构非线性分析这门学科发展的内在动力。我国规范较早地认识到了混凝土本构关系的重要性, 在上一版《混凝土结构设计规范》(GB50010-2002) [1] 中引入我国学者基于试验结果建立的混凝土单轴受力本构关系表达式, 并建议了相应的系数取值。规范建议的单轴本构关系表达式在应力应变的层次上很好的描述了混凝土的受力特性, 并且能够较好的反映甚至预测试验结果。

近年来, 理论研究和工程实践两个方面都对混凝土本构关系提出了更高的要求, 希望基于混凝土多轴

受力本构关系进行复杂结构的分析和设计。在当今的研究中, 混凝土多轴本构关系大都基于塑性力学或者损伤理论。这两类理论首先都对一维本构关系进行解构, 寻找能够推广到多维空间的内变量, 然后基于势函数将一维演化推广到多维, 最终建立多维本构关系。塑性理论在原始的应力应变曲线中解构出了塑性应变, 并建立塑性应变与应力的非线性关系, 然后再基于塑性势函数将一维非线性本构关系推广到多维。对于金属等材料, 塑性应变表征了其非线性性质的本质性特征, 其多维的计算和模拟结果也较好。混凝土非线性分析的研究中也较早地引入了塑性力学, 并开展了系统的研究, 但是结果始终令人不太满意, 其原因在于塑性理论对与软化、弱化等混凝土物理力学的本质特性缺乏直接而有效的描述。基于对弱化、软化等特性的直接描述, 研究者建立了损伤力学。损伤力学首先对混凝土一维本构曲线进行解构, 从中抽象出刚度退化作为损伤指标, 定义为损伤变量, 并基于一维应力应变曲线得到损伤演化方程, 然后类比塑性力学

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (90715033).

作者简介: 李杰(1957-), 男, 教授, Email: lijie@tongji.edu.cn;

任晓丹(1981-), 男, 讲师;

曾莎洁(1983-), 女, 博士.

对内变量演化的描述建立多维损伤演化法则，综合一维损伤演化方程和多维损伤演化法则，就可以得到多维本构关系。由于抓住了混凝土本质的力学特征，损伤力学能够较好的模拟混凝土在多维应力状态下的力学行为。在各国学者不懈努力的基础上，损伤力学近年来获得了长足的发展，并且已经成为描述混凝土多维力学特性的标准工具[2][3]。

前已述及，单轴应力应变曲线是多维本构关系基础，所以本文首先基于损伤的视角，对规范给出的单轴本构关系进行等价变换；然后结合损伤演化的若干基本性质，对变换后的单轴本构关系进行讨论；最后在损伤演化的基础上，同时考虑残余应变等因素，对规范中建议的单轴应力应变关系引入若干改进，使之更适用于描述复杂受力状态和多维损伤演化，从而为多维本构关系的建立奠定坚实的基础。

## 1 旧版规范建议混凝土本构关系

旧版《混凝土结构设计规范》(GB2010-2002)附录 C.2 中给出了混凝土单轴应力应变关系如下：  
混凝土单轴受压的应力-应变曲线如图 1：

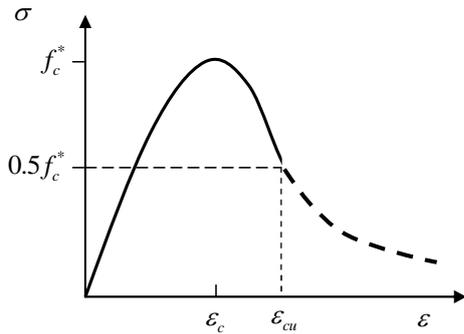


图 1 混凝土单轴受压应力应变曲线

其方程可按下列公式确定：

$$y = \begin{cases} \alpha_a x + (3 - 2\alpha_a)x^2 + (\alpha_a - 2)x^3 & x \leq 1 \\ x / [\alpha_d(x-1)^2 + x] & x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \quad (2)$$

$$y = \frac{\sigma}{f_c^*} \quad (3)$$

$\alpha_a$ 、 $\alpha_d$ —混凝土单轴受压应力-应变曲线上段、下降段的参数值；

$f_c^*$ —混凝土单轴抗压强度，其值可以是 ( $f_c$ 、 $f_{cm}$  或  $f_{ck}$ )，根据实际结构分析需要取相应的值；  
 $\varepsilon_c$ —与单轴抗压强度  $f_c^*$  相应的混凝土峰值压应变。

对于上述四个参数，规范中分别针对不同强度等级的混凝土建议了取值。

混凝土单轴受拉的应力-应变曲线 (图 2) 方程可按下列公式确定：

$$y = \begin{cases} 1.2x - 0.2x^6 & x \leq 1 \\ x / [\alpha_t(x-1)^{1.7} + x] & x > 1 \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \quad (5)$$

$$y = \frac{\sigma}{f_t^*} \quad (6)$$

$\alpha_t$ —混凝土单轴受拉应力-应变曲线下降段的参数值；  
 $f_t^*$ —混凝土单轴抗拉强度，其值可以是 ( $f_t$ 、 $f_{tm}$  或  $f_{tk}$ )，根据实际结构分析需要取相应的值；  
 $\varepsilon_t$ —与单轴抗拉强度  $f_t^*$  相应的混凝土峰值拉应变。

对于上述三个参数，规范中也分别针对不同抗拉强度的混凝土建议了取值。

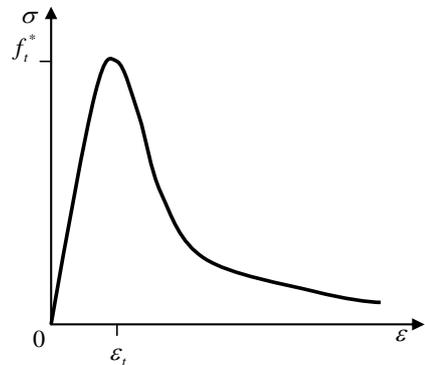


图 2 混凝土单轴受拉应力应变曲线

## 2 本构关系的损伤表示及其讨论

重新考察混凝土应力应变曲线 (图 3)，可以发现整个加载过程中伴随着强度和刚度退化，故采用刚度退化来描述混凝土的力学行为是合理的，将弹性损伤变量定义为刚度退化指标如下

$$d = \frac{E_c - E_s}{E_c} \quad (7)$$

根据割线模量的定义，有

$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (8)$$

结合式(7)和(8), 可得单轴本构关系的损伤表达式

$$\sigma = (1-d)E_c\varepsilon \quad (9)$$

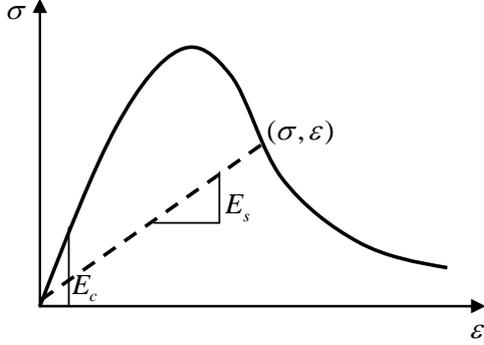


图3 混凝土单轴应力应变曲线

综合式(1)和(9), 可解得单轴受压损伤演化方程如下

下

$$d_c = \begin{cases} 1 - \rho_c [\alpha_a + (3 - 2\alpha_a)x + (\alpha_a - 2)x^2] & x \leq 1 \\ 1 - \frac{\rho_c}{\alpha_d(x-1)^2 + x} & x > 1 \end{cases} \quad (10)$$

式中系数

$$\rho_c = \frac{f_c^*}{E_c \varepsilon_c} \quad (11)$$

综合式(4)和(9), 可得单轴受拉损伤演化方程如下

$$d_t = \begin{cases} 1 - \rho_t [1.2 - 0.2x^5] & x \leq 1 \\ 1 - \frac{\rho_t}{\alpha_t(x-1)^{1.7} + x} & x > 1 \end{cases} \quad (12)$$

式中系数

$$\rho_t = \frac{f_t^*}{E_c \varepsilon_t} \quad (13)$$

式(10)和(12)中参数的定义请参阅本文前一节。

根据热力学基本原理, 损伤演化方程并不是任意的, 需满足某些基本条件:

$$\begin{cases} d(0) = 0 & \text{未损伤材料的损伤为0} \\ d(\infty) = 1 & \text{完全损伤材料损伤为1} \\ \dot{d} \geq 0 & \text{损伤不可恢复} \end{cases} \quad (14)$$

利用式(14)条件考察式(10), 可得下述三个判别条件

$$d_c(0) = 1 - \rho_c \alpha_a = 0 \quad (15)$$

$$d_c(\infty) = 1 - \frac{\rho_c}{\alpha_t(\infty-1)^{1.7} + \infty} = 1 - 0 = 1 \quad (16)$$

$$\dot{d}_c = \begin{cases} \rho_c [(2\alpha_a - 3) + 2(2 - \alpha_a)x] & x \leq 1 \\ \frac{\rho_c [2\alpha_d(x-1) + 1]}{[\alpha_d(x-1)^2 + x]^2} & x > 1 \end{cases} \geq 0 \quad (17)$$

下面我们逐一讨论这三个判别条件。

根据式(15)有

$$\alpha_a = \frac{1}{\rho_c} = \frac{E_c \varepsilon_c}{f_c^*} \triangleq \frac{E_c}{E_{cs}} \quad (18)$$

其中,  $E_{cs} = f_c^* / \varepsilon_c$  为应力峰值点的割线模量; 系数  $\alpha_a$  具有明确的物理意义, 即峰值割线模量与初始弹性模量的比值, 可以直接计算得出。

式(16)显然满足。

式(17)中包含两个不等式。对于  $x > 1$  情况下, 根据(17)中表达式显然有  $\dot{d}_c \geq 0$ ; 对于  $x \leq 1$  时, 应变率是  $x$  的线性函数, 线性函数在一个区间上大于等于 0 的充要条件是其两个端点处大于等于 0, 我们有  $\dot{d}_c(0) \geq 0$  且  $\dot{d}_c(1) \geq 0$ , 可得

$$\begin{aligned} 2\alpha_a - 3 \geq 0 & \Rightarrow \alpha_a \geq 1.5 \\ 1 \geq 0 & \Rightarrow \text{显然满足} \end{aligned} \quad (19)$$

同理, 利用式(14)考察受拉损伤演化式(12), 有

$$d_t(0) = 1 - 1.2\rho_t = 0 \quad (20)$$

$$d_t(\infty) = 1 - \frac{\rho_t}{\alpha_t(\infty-1)^{1.7} + \infty} = 1 - 0 = 1 \quad (21)$$

$$\dot{d}_t = \begin{cases} \rho_t x^4 & x \leq 1 \\ \frac{\rho_t [1.7\alpha_t(x-1)^{0.7} + 1]}{[\alpha_t(x-1)^{1.7} + x]} & x > 1 \end{cases} \geq 0 \quad (22)$$

式(21)、(22)显然满足。根据式(20), 可得

$$\rho_t = \frac{f_t^*}{E_c \varepsilon_t} = \frac{1}{1.2} \quad (23)$$

### 3 一维本构关系的改进

由上述讨论可以看出, 虽然旧版规范建议的应力应变曲线能够很好的拟合混凝土的试验曲线, 但是由于其内在的经验性, 在某些细节上并不能准确反映混

凝土的性能,由此引入的附加条件式(19)与式(23)对于一般的混凝土并不是显然满足的,特别是规范中建议的参数取值就在相当多的情况下不满足这两个条件,那么直接采取上述损伤表达式势必扭曲某些混凝土的力学性能,相应的模拟和计算也不会得到理想的结果。

由于两个约束条件均来自损伤演化的前半段,那么这里考虑改进损伤演化前半段的表达式。

Mander 等(1988)<sup>[4]</sup>在大量试验的基础上建议了下述混凝土应力应变关系,在此后的20年间得到了广泛的应用,其表达式为

$$y = \frac{nx}{n-1+x^n} \quad (24)$$

其中

$$n = \frac{E_c \varepsilon_{ct}}{E_c \varepsilon_{ct} - f_{ct}^*} \quad (25)$$

式(24)可用于表示混凝土单轴受拉或者受压应力应变曲线,符号的下标 ct 表示公式分别适用于单轴受压受拉两种受力状态,其余符号定义同前。将式(24)改写为损伤表达式,有

$$d_{ct} = 1 - \frac{\rho_{ct} n}{n-1+x^n} \quad (26)$$

其中

$$\rho_{ct} = \frac{f_{ct}^*}{E_c \varepsilon_{ct}} \quad (27)$$

可知式(26)满足式(14)中的三个条件。

另一方面, Mander 模型采用一段形式的混凝土应力应变表达式,虽然保持了曲线的连续性和表达的简洁性,但是实际中混凝土的下降段差别很大,很难直接采用峰值强度、峰值应变以及弹性模量直接确定,所以宜引入相关参数描述混凝土下降段的形状,这样也有利于数值模拟。

综上,可采用 Mander 模型描述混凝土应力应变曲线的上升段,而下降段采用我国规范中建议的表达式。同时注意到,受拉应力应变曲线的下降段表达式与受压曲线的下降段表达是差别很小,为了实际应用的方便,本文建议统一给出混凝土单轴受拉和受压的应力应变曲线表达是如下

$$y = \begin{cases} nx/[n-1+x^n] & x \leq 1 \\ x/[\alpha_{ct}(x-1)^2+x] & x > 1 \end{cases} \quad (28)$$

其中

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ct}} \quad (29)$$

$$y = \frac{\sigma}{f_{ct}^*} \quad (30)$$

$\alpha_{ct}$ —混凝土单轴受压/拉应力-应变曲线下降段的参数值,依据试验结果拟合,无试验结果情况下可分别按照规范给出的表格取用;

$f_{ct}^*$ —混凝土单轴抗压/拉强度,其值可以是( $f_{ct}$ 、 $f_{cm}$ 或 $f_{ctk}$ ),根据实际结构分析需要取相应的值;

$\varepsilon_{ct}$ —与单轴抗压/拉强度 $f_{ct}^*$ 相应的混凝土峰值压/拉应变。

将式(28)改写成损伤演化表达,有

$$\sigma = (1-d_{ct})E_c \varepsilon \quad (31)$$

$$d_{ct} = \begin{cases} 1 - \frac{\rho_{ct} n}{n-1+x^n} & x \leq 1 \\ 1 - \frac{\rho_{ct}}{\alpha_{ct}(x-1)^2+x} & x > 1 \end{cases} \quad (32)$$

其中

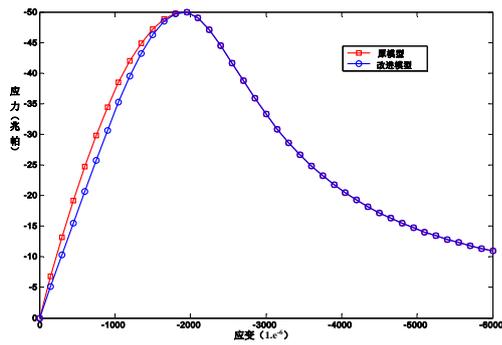
$$\rho_{ct} = \frac{f_{ct}^*}{E_c \varepsilon_{ct}} \quad (33)$$

$$n = \frac{E_c \varepsilon_{ct}}{E_c \varepsilon_{ct} - f_{ct}^*} \quad (34)$$

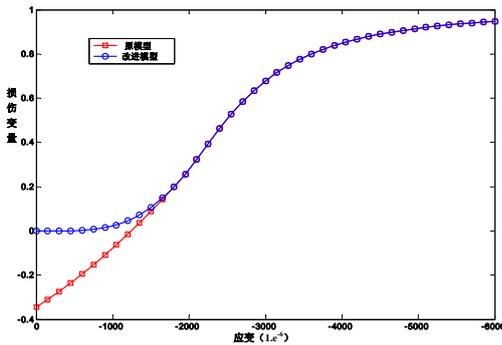
其余参数定义同前。

图4和图5中给出了改进前后的本构关系的计算结果。公式中的计算参数均取自规范中建议的相应强度等级混凝土的计算参数。由计算结果可以发现,改进前后的模型在应力应变层面上是相近的,同时也都能较好的描述混凝土单轴受力情况下的非线性特性,本文在后面的讨论中也进行了与试验数据的对比研究,证明了模型在应力应变层次上的有效性。但是在损伤演化层面上,原模型由于未考虑不可逆热力学的基本要求,其计算结果具有明显的不合理性,在加载之初甚至出现的了相当长的负数损伤段,若直接采用这个模型进行结构模拟,将会导致迅速的数值发散,从而不能得到合理的结构模拟结果。修正后的模型所得的损伤演化曲线与经典损伤演化曲线一致,满足热力学的基本要求,同时在前后半段和后半段交界处过渡光滑,用于结构模拟就能够保证数值过程的稳定

性和可靠性，进而得到合理的模拟结果。

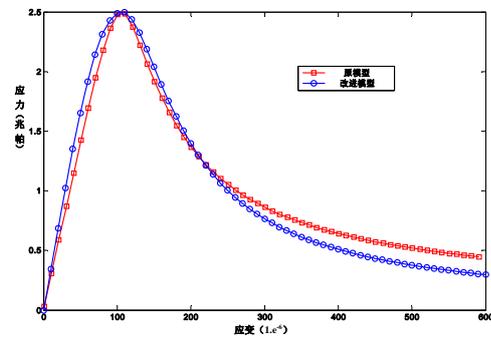


(a)受压应力-应变曲线

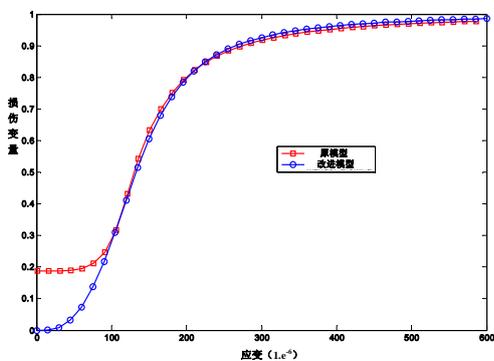


(b)受压损伤演化曲线

图 4 单轴受压本构关系( $f_c=50\text{MPa}$ )



(a)受拉应力-应变曲线



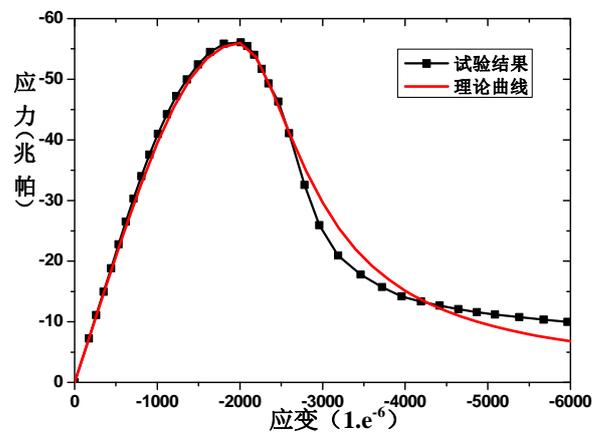
(b)受拉损伤演化曲线

图 5 单轴受拉本构关系( $f_t=2.5\text{MPa}$ )

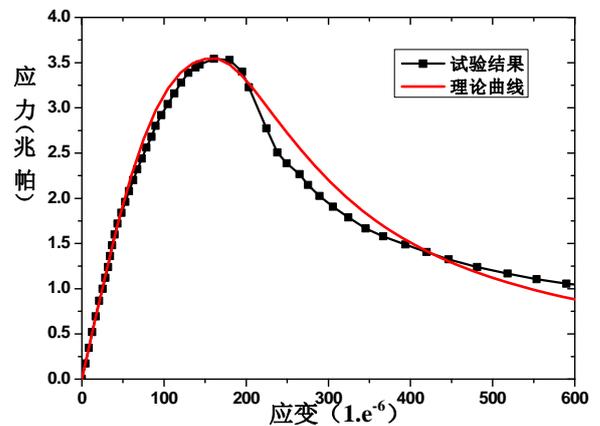
## 4 模型验证

### 4.1 单轴单调加载试验验证

本节研究正是对于上述建议改进公式进行的支持和补充，将理论结果与试验结果进行对比，以验证改进公式的有效性。后续讨论中未特别标明的试验结果均引自本研究梯队于 2004-2005 年在清华大学高坝大型实验室进行的试验结果<sup>[5]</sup>。根据上述改进的单轴受压/拉统一本构模型所得单轴应力应变曲线与试验结果一同绘制在图 6 中。其中单轴受压的参数为： $f_c^* = -56\text{MPa}$ ， $\varepsilon_c = -2012 \mu\varepsilon$ ， $\alpha_c = 5.5$ ；单轴受拉参数为： $f_t^* = 3.55\text{MPa}$ ， $\varepsilon_t = 160 \mu\varepsilon$ ， $\alpha_t = 5.5$ 。



(a) 单轴受压应力应变曲线



(b)单轴受拉应力应变曲线

图 6 单轴单调加载全曲线对比

### 4.2 构件数值模拟验证

1989 年，Vecchio<sup>[7]</sup>设计了一个开孔板纯剪问题来测试钢筋混凝土膜单元的性能（图 8），后来被当作钢筋混凝土构件非线性分析的 benchmark 问题。本文亦以此为对象进行实例分析。

数值模拟采用三维分离式有限元建模，混凝土采用三维固体单元，钢筋采用三维杆单元，直接绑定，

不考虑粘结滑移。混凝土与钢筋的三维有限元模型数值模拟仍然采用三维分离式有限元模型。混凝土采用三维实体单元，钢筋采用三维杆单元，二者之间完全绑定，不考虑粘结滑移。分析中采用的材料参数为：混凝土单轴受拉强度  $f_t^* = 1.0$  MPa，单轴受拉峰值应变  $\varepsilon_t = 60 \times 10^{-6}$ ，单轴受拉下降段参数  $\alpha_t = 3.0$ ，单轴受压强度  $f_c^* = 25$  MPa，单轴受压峰值应变  $\varepsilon_c = 2000 \times 10^{-6}$ ，单轴受压下降段参数  $\alpha_c = 5.2$ ，混凝土弹性模量  $E_c = 20$  GPa，混凝土泊松比  $\nu = 0.22$ ；钢筋屈服强度  $f_y = 400$  MPa，钢筋弹性模量  $E_s = 210$  GPa。

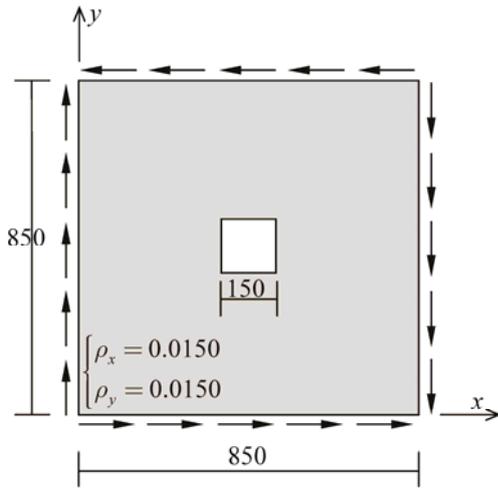


图 7 钢筋混凝土开口板剪切问题

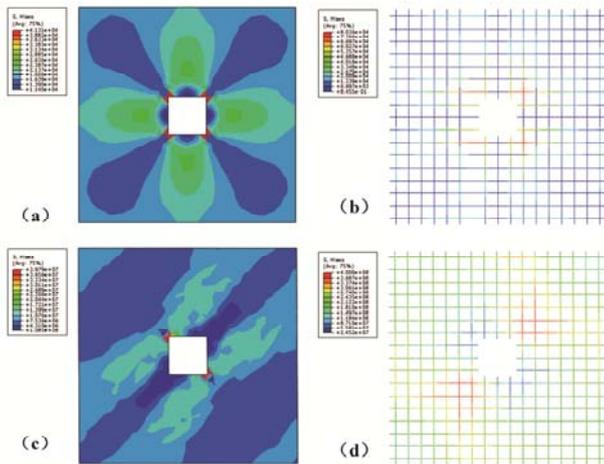


图 8 混凝土与钢筋的应力云图：(a) 弹性阶段混凝土应力；(b) 弹性阶段钢筋应力；(c) 损伤后混凝土应力；(d) 损伤后钢筋应力。

采用本文模型进行的数值模拟结果如图 8 和图 9 所示。由应力云图可以看出，在初始弹性状态，开孔处受拉角部与受压角部应力幅值是一样的，其 Mises 应力云图具有 90 度旋转具有对称性；损伤以后，由于混凝土材料本身在拉应力与压应力作用下行为迥异，

导致应力分布丧失了 90 度旋转对称性，只具有轴对称性。本文计算的平均剪应力剪应变曲线也与 Vecchio 的结果符合较好，再次验证了本文模型的正确性和有效性。

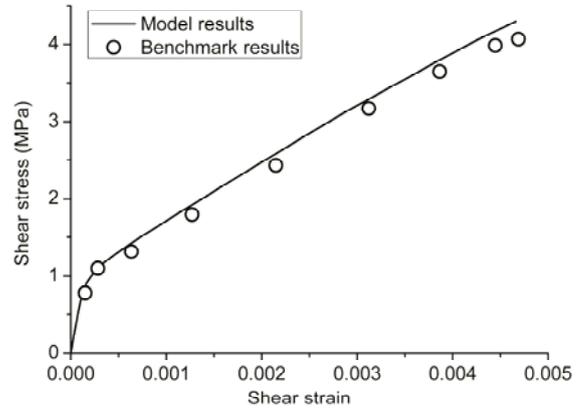


图 9 平均剪应力-剪应变曲线

## 5 结论

前述改进的单轴单调加载本构统一模型具有理论上的严密性和使用上的简便性，这就为一维非线性本构关系在工程实际中的应用奠定了基础，并为多维本构关系的建立提供了可能。本文建议公式(31)~(34)及构成了新版《混凝土结构设计规范》(GB50010-2010)所采用混凝土单轴本构关系的基础表达式。

## 参考文献：

- [1] 中国建筑科学研究院主编. 混凝土结构设计规范 (GB 50010-2002). 中华人民共和国国家标准. 北京: 中国建筑工业出版社.
- [2] Krajcinovic D. Damage mechanics. Second edition[M]. Elsevier B.V., 1996.
- [3] Lemaitre J, Desmorat R. Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures[M]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2005.
- [4] Mander JB, Priestley MJN, Park R. Theoretical stress strain model for confined concrete[J]. *Journal of Structural Engineering, ASCE*. 1988, 114(8): 1804-1826.
- [5] 李杰 任晓丹 杨卫忠. 混凝土二维本构关系试验研究[J]. *土木工程学报*, 2007, 40(4): 6-14.
- [6] Karsan ID, Jirsa JO. Behavior of concrete under compressive loadings [J]. *Journal of Structure Division, ASCE*. 1969, 95(12): 2535-2563.
- [7] Vecchio FJ. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes [J]. *ACI Structural Journal*, 1989, 86(1):26-35.