

# 现行规范建议混凝土本构关系

## I: 理论探讨与思考

李杰 任晓丹

同济大学土木工程学院, 上海 200092

**摘要:** 本文对现行《混凝土结构设计规范》(GB50010-2010) 附录 C 建议的混凝土本构关系进行了评述。首先基于对混凝土非线性行为中“软化”、“弱化”特性的认识, 将“损伤”的概念引入到混凝土本构关系中, 并对经典混凝土单轴本构关系进行了改写和修正。进而考虑到不同拉、压组合作用下混凝土非线性行为的差异, 引入受拉、受压两个损伤变量, 同时采用能量等效应变考虑不同拉、压组合作用下损伤演化的差异, 建议了混凝土二维本构关系。在此基础上, 基于国外成熟的研究成果, 建议了重复受压作用下残余应变的表达式, 并基于损伤的概念对其进行了改写。最后, 综合讨论了本构关系在实际应用中的一些问题。

**关键词:** 混凝土结构; 本构关系; 损伤模型; 结构非线性分析

**中图分类号:** TU313      **文献标识码:** A

**文章编号:**

### Concrete Constitutive Model Suggested by the Current Design Code

#### Part I: Theoretical Considerations

*LI Jie and REN Xiaodan*

College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China

**Abstract:** The damage constitutive model proposed by the Design Code of Concrete Structures (GB50010-2010) is discussed in the present paper. Firstly, the concept of damage is introduced and the uniaxial constitutive model is then developed based on the conventional stress-strain models. Second, considering the nonlinear behaviors of concrete under different combinations of biaxial tensions and compressions, both of the tensile and compressive damages are introduced and the energy equivalent strains are developed. Third, the equation describing the evolution of remnant strain is developed and redefined based on the concept of damage. Finally, numbers of selected questions for the application of the proposed damage models are discussed.

**Key words:** concrete structure, constitutive law, damage model, nonlinear structural simulation

**Email:** lijie@tongji.edu.cn

## 引 言

长期以来, 土木结构的分析和设计通常采用

三段论的方式: 采用线弹性分析方法确定结构的内力; 采用极限状态分析的方法确定构件和截面的承载力; 通过比较线弹性分析得到的内力和极限状态分析得到的承载力来确定结构的安全性。这种三段式的理论体系是历史发展的必然产物, 在缺乏结构分析手段的条件下发挥了不可替代的作用。而另一方面, 由此带来的结构整体线性分

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (51261120374, 51208374)

**作者简介:** 李杰, 工学博士, 同济大学特聘教授  
任晓丹, 工学博士, 同济大学讲师

**收稿日期:**

析与构件（截面）非线性分析之间的矛盾却也构成了现行结构设计理论的主要矛盾，并且已经为大多数结构设计师和研究者所明确。由于结构线弹性分析的过程乏善可陈，基于此体系建立起来的结构设计规范就将主要篇幅集中在构件（截面）的极限状态分析中来，这就使得其实质上成为了“构件计算规范”。

近年来，随着本构关系理论、数值分析方法和计算机软硬件的长足进步，人们逐步看到了建立具有工程实用性的结构非线性全过程分析方法的曙光。而一批支撑国民经济发展的重大工程结构的兴建，也对结构非线性全过程分析方法提出了迫切的工程需求。如何在结构设计的过程中，合理考虑结构的整体非线性性能，形成具有内在一致性的结构非线性分析和设计的理论体系，成为目前结构工程领域的首要课题。而以此为出发点，最新一版颁布实施的《混凝土结构设计规范》（GB50010-2010）<sup>[1]</sup>（以下简称《规范》）迈出了从“构件计算规范”到“结构设计规范”的关键步伐，增加了“结构方案”及“结构分析”的有关内容。

在结构非线性分析过程中，由于材料本构关系直接定义了材料的非线性行为特征，其模型和参数的选取至关重要。规范中为了较为细致地考虑材料的本构关系，专门设置附录 C 对钢筋本构关系、混凝土本构关系以及粘结本构关系进行了阐述。其中为了描述混凝土材料在受力之后的软化和弱化特性，《规范》附录 C 中引入了损伤本构关系模型，这一模型的引入使得我国规范在混凝土本构关系方面走在了各国规范的前列，即便是与美国和欧洲的规范相比，我国规范也具有显著的先进性。

在实际应用过程中，研究者和工程师也针对规范建议混凝土损伤模型提出了一些建议、意见和困惑。在此，笔者希望借助此文，对规范附录 C 建议混凝土损伤本构关系模型做略为详细的阐释。本文分为两个部分：第 I 部分主要探讨规范建议损伤模型的背景、依据和应用中需要注意的问题；第 II 部分中以若干详细的算例说明模型的使用过程和计算结果的特点。

## 1. 损伤概念的引入与一维本构关系

在外力作用下，混凝土的破坏过程对应于其中裂缝的产生、发展和交叉的过程。由于裂缝对

材料的削弱作用，混凝土的受力学行为表现出典型的软化和弱化的特点。典型的实测混凝土应力应变曲线分为四个主要阶段（图 1）：初始线性段、非线性段、峰值之后的下降段以及平稳段。除了在第一阶段混凝土的弹性刚度基本不变之外，后续几个阶段混凝土的刚度均表现出了渐进式的减小趋势。而这种渐进式的刚度退化即为裂纹造成的材料软化行为的外在体现。

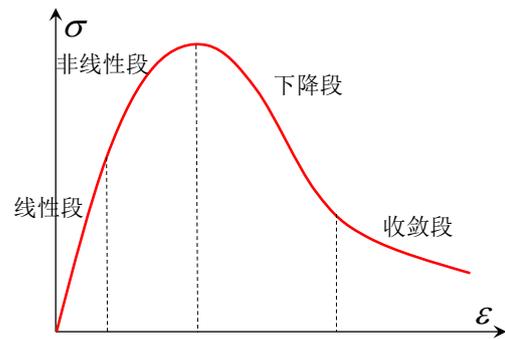


图 1 混凝土单轴受力应力应变曲线

Fig.1 Uniaxial stress-strain curve of concrete

在线性阶段，混凝土的应力应变关系可以借助初始弹性模量  $E_c$  作为比例系数，采用线性表达式表示：

$$\sigma = E_c \varepsilon \quad (1)$$

其中  $\sigma$  和  $\varepsilon$  分别为应力和应变。

当加载超过线性阶段进入后续的非线性阶段，由于裂缝的产生、扩展和交叉，混凝土将表现出明显的软化特性，体现在本构关系上，可以认为混凝土的弹性模量随着加载而持续减小，称为刚度退化。那么可以在式(1)的基础上引入折减系数来考虑这种刚度的退化，于是得到如下应力应变关系表达式：

$$\sigma = \omega E_c \varepsilon \quad (2)$$

其中  $\omega$  称为材料的完整性 (integrity) 系数，取值范围 [0,1]，取 1 时表示材料未破坏，取 0 时表示材料弯曲破坏。与材料的“完整性”相对应的，是材料的“破损性” (brokenness)，即材料的破坏程度，可以用与材料完整性系数相对应的材料损伤因子  $d$  表示，二者之间的关系为：

$$d = 1 - \omega \quad (3)$$

由式(3)可以看出，损伤因子  $d$  的取值也在 [0,1] 之间，损伤因子取 0 表示完全没有损伤、材料完

好；取 1 表示完全损伤，材料刚度降为 0。由于理论分析和工程设计中均对于材料的破坏和破损更加关心，所以通常采用损伤因子表示本构关系。将式(3)代入式(2)，可得损伤本构关系：

$$\sigma = (1-d)E_c \varepsilon \quad (4)$$

当然，混凝土的损伤和破坏并不是突然产生的，而是随着加载的过程逐渐发展的，所以损伤变量也不是一个固定的数值，而是随着加载过程呈现渐进式变化。对于单轴加载，损伤变量可以定义为单轴应变的单调递增函数，有

$$d = f(\varepsilon) \quad (5)$$

函数  $f(\cdot)$  的表达式通常是采用分析或实测所得应力  $\sigma$  与应变  $\varepsilon$  的关系曲线，通过式(4)反解得到。

虽然混凝土的非线性行为由其中裂缝的产生、发展与交错等现象决定，但是裂纹在不同的应力状态下，其开展的模式有很大的差别，这也就造成了混凝土的力学性能在受拉与受压应力状态下，有着很大的差异。此时通常引入两个损伤变形，即受拉损伤变量  $d_t$  和受压损伤变量  $d_c$ ，分别描述拉应力作用下与压应力作用下的混凝土非线性行为，形成了双标量损伤模型的基本格局。

现行《规范》中建议单轴混凝土本构关系，即是在上一版规范（GB50010-2002）<sup>[2]</sup>建议混凝土单轴受拉与受压本构关系曲线的基础上，利用式(4)将其等价整理为损伤表达形式后建立的。而上一版规范（GB50010-2002）建议混凝土单轴受拉与受压本构关系，是在我国学者过镇海教授的研究成果的基础上定型的。

现行《规范》中建议混凝土单轴受拉本构关系为：

$$\sigma = (1-d_t)E_c \varepsilon \quad (6)$$

$$d_t = \begin{cases} 1 - \rho_t [1.2 - 0.2x^5] & x \leq 1 \\ 1 - \frac{\rho_t}{\alpha_t (x-1)^{1.7} + x} & x > 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{t,r}}, \quad \rho_t = \frac{f_{t,r}}{E_c \varepsilon_{t,r}} \quad (8)$$

其中  $\alpha_t$  为混凝土单轴受拉应力应变曲线下降段

参数，《规范》中给出了取值表格； $f_{t,r}$  与  $\varepsilon_{t,r}$  分别为混凝土单轴抗拉强度代表值及其所对应的峰值应变，《规范》中亦给出了取值规则和表格。

现行《规范》中建议混凝土单轴受压本构关系为：

$$\sigma = (1-d_c)E_c \varepsilon \quad (9)$$

$$d_c = \begin{cases} 1 - \frac{\rho_c n}{n-1+x^n} & x \leq 1 \\ 1 - \frac{\rho_c}{\alpha_c (x-1)^2 + x} & x > 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c,r}}, \quad \rho_c = \frac{f_{c,r}}{E_c \varepsilon_{c,r}}, \quad n = \frac{1}{1-\rho_c} \quad (11)$$

其中  $\alpha_c$  为混凝土受压应力应变曲线下降段参数，《规范》中给出了取值表格； $f_{c,r}$  与  $\varepsilon_{c,r}$  分别为混凝土单轴抗压强度代表值及其所对应的峰值应变，《规范》中亦给出了取值规则和表格。这里需要特别指出的是，式(10)的下降段是根据上一版《规范》中混凝土单轴受压应力应变曲线求解得到的；而其上升段则是采用国际上常用的 Mander 模型<sup>[3]</sup>求解得到的，目的是为了增强结构数值分析过程的稳定性。

## 2. 二维本构关系

剪力墙是建筑结构中常用的一类抗侧力构件。剪力墙通常截面高厚比较大，在侧向力作用下剪切变形所占比重较大，且往往具有连梁、开洞等复杂的构造，所以剪力墙体系的变形不满足平截面假定，更不能直接采用一维本构关系进行剪力墙的非线性分析。根据多年来的研究积累<sup>[4]</sup>：剪力墙的平面内变形可以采用平面应力单元或者膜单元描述；剪力墙的平面外变形可以采用分层壳单元描述。上述二者均以二维受力和材料的二维本构关系为基本前提。

将混凝土二维本构关系的简化表达式写入规范附录，是现行《规范》（GB50010-2010）的一个重要突破。《规范》建议混凝土二维本构关系是一维损伤本构关系的直接推广：以标量损伤演化，考虑材料受力之后内部裂缝的发展引起的软化、弱化行为；在二维主应力空间内，通过考虑不同的受拉、受压的应力状态组合，引入对应的

受拉、受压损伤演化分别进行描述；引入能量等效应变考虑不同加载方向之间的相互影响，并进而反映到损伤演化过程中<sup>[5][6]</sup>。

首先定义有效应力如下：

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{Bmatrix} = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

其中  $\sigma'$  表示有效应力，其物理意义是未损伤材料的应力；下标“1”、“2”分别表示第1、第2主方向； $\nu$ 为混凝土泊松比。

对于二维受力状态下的混凝土，不同的拉压组合将对混凝土的损伤和破坏行为产生很大的影响，所以《规范》附录C中针对不同的拉压区给出不同的拉压损伤变量组合。

1) 双轴受拉 ( $\sigma'_1 < 0, \sigma'_2 < 0$ )

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = (1-d_t) \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{t,e} = -\sqrt{\frac{1}{1-\nu^2} [(\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2]} \quad (14)$$

其中， $\varepsilon_{t,e}$ 为受拉能量等效应变；令  $x = \frac{\varepsilon_{t,e}}{\varepsilon_{t,r}}$  并代

入式(7)可得受拉损伤变量  $d_t$ 。

2) 双轴受压 ( $\sigma'_1 \geq 0, \sigma'_2 \geq 0$ )

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = (1-d_c) \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{c,e} = \frac{1}{(1-\nu^2)(1-\alpha_s)} \left[ -\alpha_s(1+\nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sqrt{(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)^2 - (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)} \right] \quad (16)$$

$$\alpha_s = \frac{r-1}{2r-1} \quad (17)$$

其中， $\varepsilon_{c,e}$ 为受拉能量等效应变；令  $x = \frac{\varepsilon_{c,e}}{\varepsilon_{t,r}}$  并代

入式(10)可得受拉损伤变量  $d_c$ ； $\alpha_s$ 为双轴受压屈服参数； $r$ 为双轴受压强度提高系数，取值范围为1.15~1.30<sup>[7]</sup>，在缺乏实验数据时，可取1.2。

3) 双轴拉压 ( $\sigma'_1 < 0, \sigma'_2 \geq 0$ )

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-d_t) & \\ & (1-d_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{t,e} = -\sqrt{\frac{1}{(1-\nu^2)}} \varepsilon_1(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad (19)$$

令  $x = \frac{\varepsilon_{t,e}}{\varepsilon_{t,r}}$  并代入式(7)可得受拉损伤变量  $d_t$ ，受

拉能量等效应变  $\varepsilon_{t,e}$  由式(19)确定；令  $x = \frac{\varepsilon_{c,e}}{\varepsilon_{t,r}}$  并

代入式(10)可得受拉损伤变量  $d_c$ ，受压能量等效

应变  $\varepsilon_{c,e}$  由式(16)确定。对于 ( $\sigma'_1 \leq 0, \sigma'_2 > 0$ )

情况，可由交换式(18)与(19)中主加载轴的顺序即可得到对应本构关系表达式。

对于上述双轴损伤本构关系可做两方面的理解。第一，不同拉压应力组合情况下，损伤的类型不同。简单的原则可以理解为：在主应力空间内，对应应力主轴如果是拉应力，则该主轴采用受拉损伤描述；反之如果是压应力，则该主轴采用受压损伤描述。可以看出，在双轴受拉区与双轴受压区，由于两个主轴的损伤类型一致，损伤演化采用相同的损伤变量描述，损伤之后材料的刚度矩阵还保持各向同性；在双轴拉压区，由于不同主轴方向不同类型的损伤演化的影响，刚度矩阵表现出各向异性甚至非对称性。第二，不同拉压组合情况下，损伤演化速度不同。在不同的拉压区内，利用能量等效应变建立二维损伤演化与一维损伤演化之间的关系，即采用两个主方向的应变计算得到等效应变，进而采用等效应变代入对应的一维损伤演化方程计算损伤变量取值。能量等效应变实际上控制了不同拉压区内损伤演化的相对快慢。

### 3. 残余应变的考虑

混凝土在外力的作用下产生了损伤，此时若外力撤去，混凝土的变形往往不能完全恢复，而保留有一定的残余变形。残余变形也对混凝土的非线性行为有着较大的影响，需要在分析中加以

适当的考虑。由于在拉应力作用下混凝土的应变值很小，同时受拉重复加载试验开展的难度较大，迄今没有积累起一定量的具有可信度的实验结果，这里指计及压应力作用下的残余应变。

参照 Mander 等人的研究成果<sup>[3]</sup>，在单轴受压条件下，混凝土卸载之后的残余应变表示为如下表达式：

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{un} - \frac{(\varepsilon_{un} + \varepsilon_{ca})\sigma_{un}}{\sigma_{un} + E_c \varepsilon_{ca}} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{ca} = \max\left(\frac{\varepsilon_{c,r}}{\varepsilon_{c,r} + \varepsilon_{un}}, \frac{0.09\varepsilon_{un}}{\varepsilon_{c,r}}\right) \sqrt{\varepsilon_{c,r}\varepsilon_{un}} \quad (21)$$

其中  $\varepsilon_z$  为残余应变， $\varepsilon_{un}$  为卸载点处的应变， $\varepsilon_{ca}$  定义为附加应变。当加载到  $(\varepsilon_{un}, \sigma_{un})$  开始卸载时，卸载段的方程可以写为：

$$\sigma = E_r(\varepsilon - \varepsilon_z) \quad (22)$$

$$E_r = \frac{\sigma_{un}}{\sigma_{un} - \varepsilon_z} \quad (23)$$

将式(23)、(20)代入(22)，可得：

$$\sigma - \sigma_{un} = (1 - \eta_d d_c) E_c (\varepsilon - \varepsilon_{un}) \quad (24)$$

其中塑性因子  $\eta_d$  表达式为：

$$\eta_d = \frac{\varepsilon_{c,r}}{\varepsilon_{c,r} + \varepsilon_{ca}} \quad (25)$$

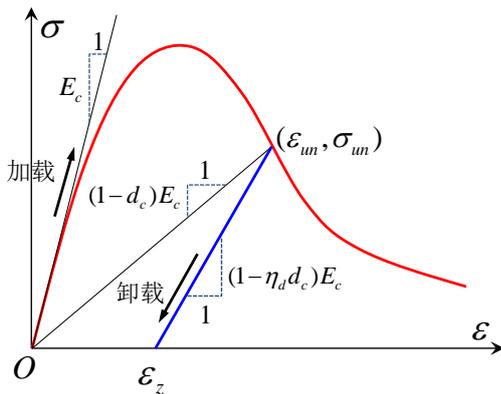


图 2 混凝土单轴受压加、卸载曲线

Fig.2 Uniaxial compressive loading/unloading stress-strain curves of concrete

如图 2 所示，混凝土应力应变曲线初始斜率为材料弹性模量  $E_c$ ，应力应变曲线上一点与原点

连线的斜率为  $(1 - d_c) E_c$ ，而卸载点  $(\varepsilon_{un}, \sigma_{un})$  处实际的卸载指向点为  $(\varepsilon_z, 0)$ ，对应的斜率为  $(1 - \eta_d d_c) E_c$ 。在损伤力学中，将对应于原点指向的损伤变量  $d_c$  定义为弹性损伤变量，将对应于残余应变点的卸载指向的损伤变量  $\eta_d d_c$  定义为弹塑性损伤变量。理论上，弹性损伤变量与弹塑性损伤变量具有等价性，二者的换算也可以简单地利用  $\eta_d$  进行。但实际应用过程中，需要根据计算程序或者软件的设定选取合适的损伤变量进行结构模拟。

对于二维本构关系，不考虑受拉主轴的残余应变，仅考虑受压主轴方向的塑性变形，那么此时受压主轴的卸载方程由于塑性应变的影响，其卸载段须引入塑性因子  $\eta_d$  参数，在双轴应力作用下其表达式可由能量等效应变定义如下：

$$\eta_d = \frac{\varepsilon_{ce}}{\varepsilon_{ce} + \varepsilon_{ca}} \quad (26)$$

不同拉压组合区内卸载方程表示为：

1) 双轴受拉 ( $\sigma'_1 < 0, \sigma'_2 < 0$ )

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_{un,1} \\ \sigma_2 - \sigma_{un,2} \end{cases} = (1 - d_t) \frac{E_c}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_{un,1} \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_{un,2} \end{cases} \quad (27)$$

2) 双轴受压 ( $\sigma'_1 \geq 0, \sigma'_2 \geq 0$ )

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_{un,1} \\ \sigma_2 - \sigma_{un,2} \end{cases} = (1 - \eta_d d_c) \frac{E_c}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_{un,1} \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_{un,2} \end{cases} \quad (28)$$

3) 双轴拉压 ( $\sigma'_1 < 0, \sigma'_2 \geq 0$ )

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_{un,1} \\ \sigma_2 - \sigma_{un,2} \end{cases} = \begin{bmatrix} (1 - d_t) & \\ & (1 - \eta_d d_c) \end{bmatrix} \frac{E_c}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_{un,1} \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_{un,2} \end{cases} \quad (29)$$

其中  $\sigma_{un,1}, \sigma_{un,2}, \varepsilon_{un,1}$  和  $\varepsilon_{un,2}$  为二维卸载点处的应力和应变。

#### 4. 几点讨论

将《规范》建议混凝土本构关系应用到结构非线性分析和模拟过程中，可能会遇一些问题，本节拟针对如下几个问题进行简要的讨论。

#### 4.1. 本构关系的描述方法

在固体力学中，固体本构关系的描述有一套复杂而完整的理论体系<sup>[8]</sup>。其核心有两点：其一是采用张量的形式表示多维条件下的应力与应变及其函数；其二是采用增量（率）形式描述复杂加载路径下的应力应变及其它变量之间的依赖关系。显然，按照上述要点建立起来的完备的本构关系应该表达为一组（非线性）张量微分方程组，而如此复杂的表达形式是无法直接写入设计规范的。《规范》附录 C 中的混凝土本构关系，是在对弹塑性损伤本构关系理论体系进行大幅简化后提出的。简化过程中，采用标量（一维）和矩阵（二维）的形式代替张量表达式，同时采用全量表达式代替增量（率）表达式。

对照本文前面给出的一维、二维损伤本构关系的表达式可以发现，目前的本构关系的描述方式相对简洁，各个常数及变量均具有明显的物理意义，易于为研究者和设计人员学习和掌握。而另一方面，本构关系的简化描述方式必然带来其完备性的丧失。例如，由于三维应力状态的复杂性，即便将三维本构关系表达为矩阵形式，其表达形式仍异常繁冗，同时又由于混凝土材料在三维应力状态下的非线性行为的理论与实验研究仍存在一些盲点（譬如约束强化、剪胀效应等），所以三维本构关系未包含在这一版《规范》中。还有，本构关系基本理论中早已言明，全量型本构关系不能完备描述复杂加载情况下的材料应力应变关系。所以现行《规范》中的混凝土损伤本构关系只给出了加载段和卸载段两端，对于卸载之后反向加载、反复加载以及不同拉压组合变换等复杂加载路径，并不能给出完备的描述。

结构在实际受力的过程中，特别是在地震等反复荷载的作用下，三维加载问题以及复杂加载路径问题等是不可避免的。此时若使用规范中模型描述复杂受力等问题，就需要在规范给出的加载曲线与卸载曲线的基础上做补充和修正。当然，既然《规范》不可能穷尽实际工程中的所有问题和情况，所以针对复杂工程情况的补充和修正也是工程设计人员所必须面对的问题。

#### 4.2. 与现有计算软件的融合

实际应用过程中，对本构关系的补充和修正更多的体现在结构计算软件的开发和设置方面。

实际结构计算软件中本构关系的程序编制大都基于完备的材料本构关系模型及其算法完成。此时只要通过参数设置，使得计算软件中本构关系得到的一维、二维应力应变加载曲线以及卸载曲线与《规范》建议本构关系一致，即可认为已经满足了《规范》要求。可以看出，《规范》建议混凝土本构关系更多的是起到了建立概念、规定参数的作用，所以并不能期望其能穷尽复杂的加载条件和路径。

对于梁柱等构件的非线性模拟，现有软件大多采用基于纤维模型开发的位移插值或力插值梁柱单元模型<sup>[9]</sup>。此时在材料本构关系层面只需要单轴应力应变曲线，而在一般结构计算软件中实现的方法有两种。其一，可以采用软件自带的一维本构关系，通过校准参数使得其受拉、受压应力应变曲线和卸载后的残余应变与《规范》规定的应力应变曲线一致。当然，若不能达到完全的一致，那么至少在弹性模量、峰值应力、峰值应变、下降段趋势和残余应变变化趋势这些关键点上保持一致。其二，通过开发计算模块的方式，将《规范》建议一维本构关系在计算软件中直接实现，此时在模块开发过程中还需要补充加、卸载准则等内容。

对于剪力墙等构件的非线性模拟，现有软件大多采用分层壳单元进行。分层壳单元的每一层均要求输入材料的二维本构关系。二维本构关系也可以参照前述一维本构关系中采用的两类方法在计算软件中实现。若采用软件自带的本构关系，那么不但要校准一维应力应变曲线，残余应变曲线，还要校准二维应力应变曲线。若开发二维本构关系的计算模块，则还需要补充多维加、卸载准则以及不同拉压组合区间的转换等内容。

对于巨型构件、组合构件以及节点等典型的三维受力构件，若需要精细考虑其非线性行为，那么现行《规范》中建议的一维、二维本构关系都将不再适用，此时需要做特别的分析和考虑。

#### 4.3. 混凝土与钢筋的相互作用

在建筑结构中，混凝土中均要配置有一定量的钢筋，此时钢筋和混凝土组成了一种复合材料。复合材料在受力后的非线性行为通常不是两种材料非线性行为的直接叠加，二者通常存在非线性相互作用<sup>[4]</sup>。特别是在某些受力条件下，这种相

互作用愈加明显。

若混凝土处于受拉应力状态，纵向受力钢筋除了能够在混凝土开裂之后承担拉应力，还起到了将拉应力在裂缝间混凝土均匀化的作用。最终使得钢筋混凝土的应力应变关系，在直接减除掉钢筋的影响之后，并不等于素混凝土的应力应变关系，其受拉下降段有一定的提高，如图 3 所示。如果在结构分析中基于分析与实验的结果，适当考虑纵筋配筋率对混凝土受拉下降段的影响，不仅可以从一个侧面反映钢筋混凝土作为一种复合材料的本质非线性特性，同时还能在一定程度上改善结构数值模拟的稳定性。

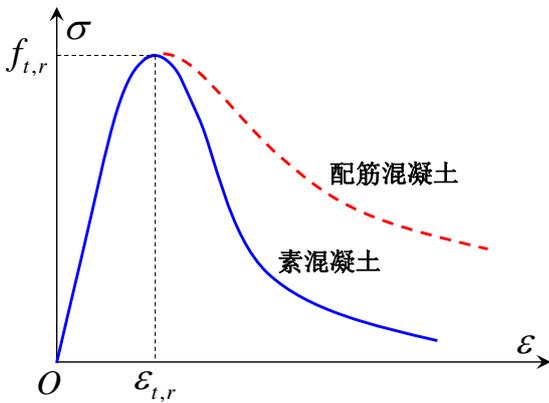


图 3 混凝土单轴受拉应力应变曲线

Fig.3 Uniaxial tensile stress-strain curves of concrete

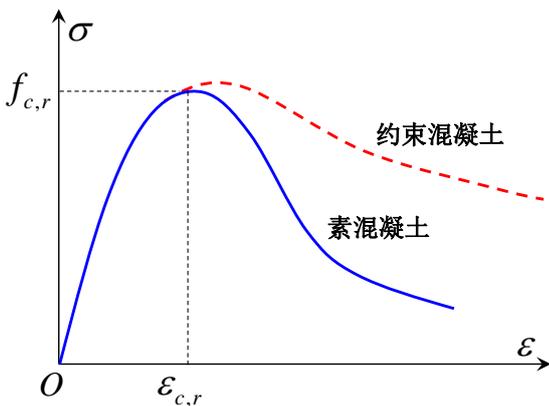


图 4 混凝土单轴受压应力应变曲线

Fig.4 Uniaxial compressive stress-strain curves of concrete

对于钢筋混凝土柱，通常会配置箍筋改善构件的抗剪性能和变形耗能能力。箍筋的配置使得构件的核心混凝土处于约束受压状态，此时混凝土的抗压强度特别是延性将会显著提高，如图 4

所示。此时若采用梁柱单元模型进行结构非线性分析，那么所输入的截面约束核心区的混凝土受压本构关系需根据箍筋约束的影响做适当的调整，才能使得数值模拟结果更接近实际状况。不同箍筋配筋率条件下钢筋混凝土约束受压本构关系已经有较为系统的研究积累，具体细节可参阅文献。

## 5. 试验验证

### 5.1. 单轴试验

《规范》中建议单轴本构关系直接来源于我国学者过镇海建议的模型<sup>[10]</sup>与国外学者 Mander 等人建议的模型<sup>[3]</sup>，这两类模型均已经过了大量的实验验证。此处将本文作者的试验结果<sup>[11]</sup>与《规范》建议单轴本构关系的结果进行了对比验证(图 5 和图 6)。其中单轴受压的参数为： $f_{c,r}=56\text{MPa}$ ， $\varepsilon_{c,r}=2012\mu\varepsilon$ ， $\alpha_c=5.5$ ；单轴受拉的参数为： $f_{t,r}=3.55\text{MPa}$ ， $\varepsilon_{t,r}=160\mu\varepsilon$ ， $\alpha_t=5.5$ 。

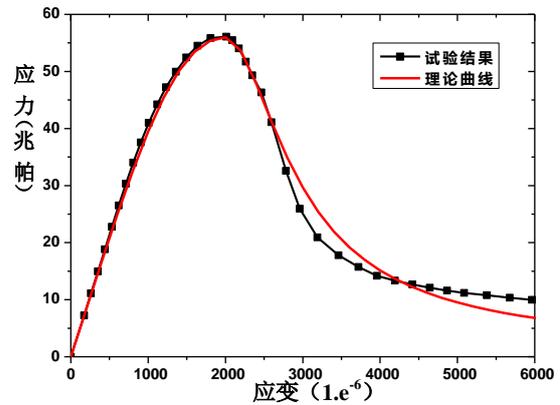


图 5 单轴受压应力应变曲线

Fig.5 Uniaxial compressive stress-strain curves of concrete

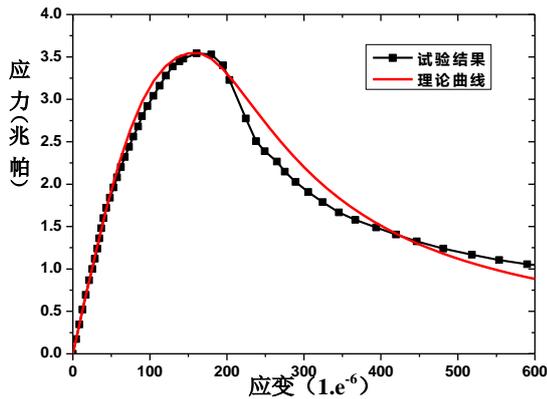


图 6 单轴受拉应力应变曲线

Fig.6 Uniaxial tensile stress-strain curves of concrete

Karsan 和 Jirsa<sup>[12]</sup>在其单轴重复受压试验中得到的应力—应变全过程曲线，实测弹性模量为  $E_c=30000\text{MPa}$ 。根据上述《规范》建议模型所得计算结果与试验结果一同绘制在图 7 中。其参数的选取为： $f_{c,r}=27.5\text{MPa}$ ， $\varepsilon_{c,r}=1800\mu\varepsilon$ ， $\alpha_c=0.6$ 。

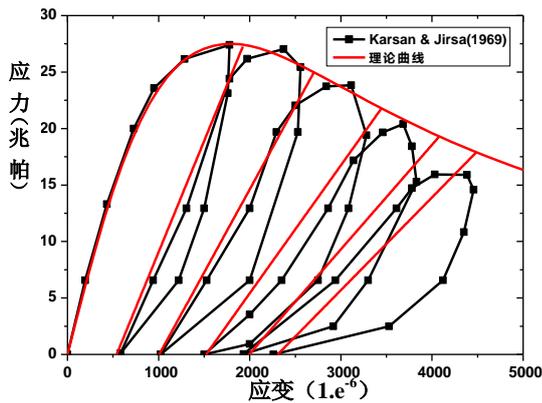


图 7 单轴重复加载曲线对比

Fig. 7 Uniaxial stress-strain curves under repeated loading

## 5.2. 双轴试验

Kupfer 等人<sup>[7]</sup>进行了一批混凝土试块双轴受压试验，被封为混凝土双轴受力试验的 benchmark 结果，常用来验证双轴本构关系的正确性。

在数值模拟中，采用两步分析的方法。首先对单轴试验进行分析，分析与试验结果如图 8 所示，将数值分析时统一的模型材料参数分别确定为：弹性模量  $E_0=3.1 \times 10^4\text{MPa}$  抗拉强度

$f_{t,r}=2.7\text{MPa}$ ，受拉峰值应变  $\varepsilon_{t,r}=133\mu\varepsilon$ ，抗压强度  $f_{c,r}=31.9\text{MPa}$ ，受压峰值应变为  $\varepsilon_{c,r}=2211\mu\varepsilon$ ，受拉曲线下降段参数为 7，受压曲线下降段参数为 0.5。

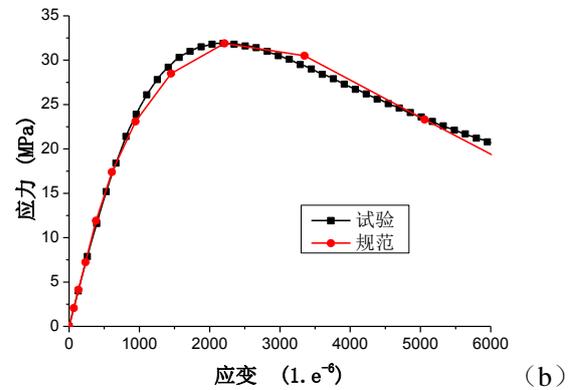
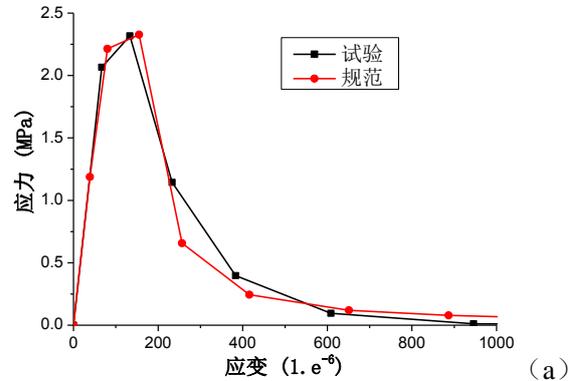


图 8 单轴单调加载应力应变曲线：(a) 单轴受拉；(b) 单轴受压

Fig. 8 Uniaxial stress-strain curves: (a)tension; (b) compression

利用上述单轴加载所得参数，结合双轴模型所需参数（泊松比  $\nu_0=0.20$ ，等双轴抗压强度和单轴抗压强度比为 1.16），分别进行了  $\sigma_1/\sigma_2=1/1$  与  $\sigma_1/\sigma_2=1/0.52$  条件下的双轴受压试验数值模拟，分析与试验结果的对比如图 9 所示。数值试验结果表明， $\sigma_1/\sigma_2=1/1$  时，受压峰值应变为  $1960\mu\varepsilon$ ，受压峰值强度为  $37\text{MPa}$ ，相对于单轴受压强度提高 16%。 $\sigma_1/\sigma_2=1/0.52$  时，受压峰值应变为  $2330\mu\varepsilon$ ，受压峰值强度为  $41\text{MPa}$ ，是单轴受压强度的 1.285 倍。图 10 给出了双轴强度包络图的结果。

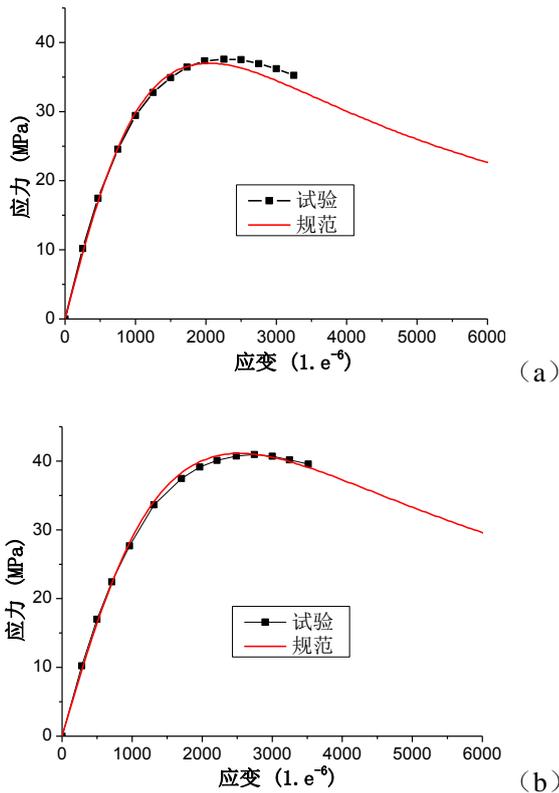


图 9 双轴受压应力应变曲线: (a)  $\sigma_1/\sigma_2=1/1$ ; (b)  $\sigma_1/\sigma_2=1/0.52$   
 Fig. 9 Biaxial stress-strain curves: (a)  $\sigma_1/\sigma_2=1/1$ ; (b)  $\sigma_1/\sigma_2=1/0.52$

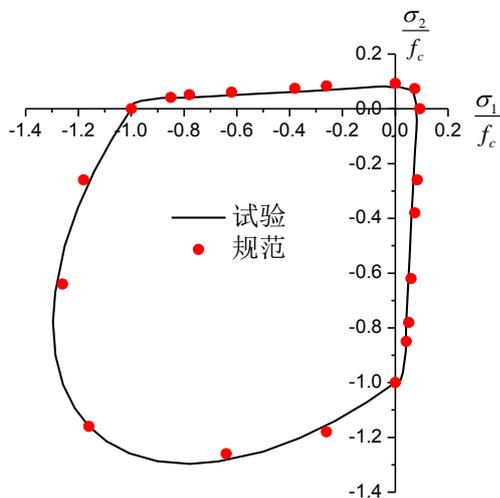


图 10 双轴强度包络图  
 Fig. 10 Biaxial strength envelope

## 6. 结论与建议

本文基于对现行《规范》建议混凝土本构关系的讨论，可得如下结论：

第一，通过引入“损伤”的概念，突出了混

凝土非线性行为中“软化”和“弱化”的基本物理特征，对经典的混凝土单轴本构关系进行了改写；

第二，基于对不同拉、压组合作用下混凝土所表现出的迥异的非线性行为的考虑，分别引入受拉、受压两个损伤变量，并基于能量等效应变考虑拉、压的组合机制，建议了混凝土二维本构关系表达式；

第三，基于经典研究结果，建议了混凝土单轴受压时的残余应变表达式，并基于能量等效应变的概念将其推广到多轴受力状态；

第四，现行《规范》中建议的全量型本构关系具有物理意义明确、表达形式简洁等优点，但是与增量型表达形式相比，其完备性尚有欠缺；

第五，《规范》建议混凝土本构关系在应用过程中，需要特别注意与现行有限元软件的融合以及钢筋与混凝土之间的耦合作用等实际问题。

## 致谢

中国建筑科学研究院徐友邻高级工程师、李云贵高级工程师等提出了指导意见，广州建研数力建筑科技有限公司李志山博士提出了宝贵意见，清华大学叶列平教授和陆新征教授针对混凝土残余应变的计算公式提出了有益的建议，在此一并表示谢忱！

## 参考文献

- [1] 《混凝土结构设计规范》(GB50010-2010) [S], 北京, 中国建筑工业出版社, 2011.
- [2] 《混凝土结构设计规范》(GB50010-2002) [S], 北京, 中国建筑工业出版社, 2003.
- [3] Mander JB, Priestley MJN, Park R. Theoretical Stress - Strain Model for Confined Concrete[J]. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 114(8): 1804-1826.
- [4] Hsu TTC and Mo YL. Unified theory of concrete structures[M]. John-Wiley & Sons, New York, 2010.
- [5] 李杰, 任晓丹, 杨卫忠. 混凝土二维本构关系试验研究[J]. *土木工程学报*, 2007, 40(4): 6-14. (Li Jie, Ren Xiaodan, Yang Weizhong. Experimental study on 2-D constitutive relationship for concrete[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2007, 40(4): 6-14. (in Chinese))

- [6] Li J and Ren X D. Stochastic damage model of concrete based on energy equivalent strain[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(11-12): 2407-2419.
- [7] Kupfer H, Hilsdorf H K, Rüsç H. Behavior of Concrete under Biaxial Stresses[J]. *ACI Journal*, 1969, 66(8): 656—666.
- [8] Belytschoko T, Liu WK, Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures[M]. John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [9] Spacone E, Filippou FC, Taucer FF. Fibre beam-column model for non-linear analysis of RC frames: part I. Formulation[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1996, 25(7): 711-725.
- [10] 过镇海, 时旭东. 钢筋混凝土原理和分析[M]. 北京, 清华大学出版社. 2003.
- [11] Ren XD, Yang WZ, Zhou Y and Li J. Behavior of High-Performance Concrete Under Uniaxial and Biaxial Loading[J]. *ACI Materials Journal*. 2008, 105(6): 548-557.
- [12] Karsan ID, Jirsa JO. Behavior of concrete under compressive loadings [J]. *Journal of Structure Division, ASCE*. 1969, 95(12): 2535-2563.