

# 第二讲：张量分析基础

## 弹塑性力学研究生核心课程

任晓丹

同济大学建筑工程系

September 19, 2017

# 本节主要内容

- 1 张量概述
- 2 张量的运算和性质
- 3 张量分析初步

# Why ?

- 弹塑性力学的三要素：非线性、**多维**、基础。
- 张量是适用于多维函数、方程以及微分系统等等的表示工具。
- 张量的本质是（多维、一般）线性变换。

# What ?



**“So what?”**

# 标量

- 标量

$$x, y, x_1, y_1, \dots$$

- 标量函数

$$y = f(x), y_1 = g(x_1), \dots$$

- 线性标量函数 (线性变换)

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

- 线性函数的表示

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \iff y = ax$$

# 向量

- 向量

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$$

- 向量的标量函数

$$y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$$

- 线性函数

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$$

$$\iff y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \sum_i a_i x_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$$

# 向量

- 向量的向量函数

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

- 线性函数

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \iff y_i = \sum_j a_{ij}x_j, \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

# 矩阵

- 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{bmatrix}$$

- 矩阵的标量函数

$$y = f(\mathbf{B})$$

- 线性函数

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$$

$$\iff y = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = \mathbf{A} : \mathbf{B}$$



# 矩阵

- 矩阵的向量函数

$$\begin{cases} y_1 = f_1(\mathbf{B}) \\ y_2 = f_2(\mathbf{B}) \\ y_3 = f_3(\mathbf{B}) \end{cases}$$

- 线性函数

$$\begin{cases} y_1 = \sum_{i,j} a_{ij}^1 b_{ij} \\ y_2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 b_{ij} \\ y_3 = \sum_{i,j} a_{ij}^3 b_{ij} \end{cases} \iff y_k = \sum_{i,j} a_{ij}^k b_{ij}$$

- What?

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3]^T, \mathbf{y} = \mathbf{A} : \mathbf{B}$$

# 矩阵

- 矩阵的矩阵（线性）函数

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{11}, C_{12}, C_{13} \\ C_{21}, C_{22}, C_{23} \\ C_{31}, C_{32}, C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{B}), f_{12}(\mathbf{B}), f_{13}(\mathbf{B}) \\ f_{21}(\mathbf{B}), f_{22}(\mathbf{B}), f_{23}(\mathbf{B}) \\ f_{31}(\mathbf{B}), f_{32}(\mathbf{B}), f_{33}(\mathbf{B}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{i,j} a_{ij}^{11} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{12} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{13} b_{ij} \\ \sum_{i,j} a_{ij}^{21} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{22} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{23} b_{ij} \\ \sum_{i,j} a_{ij}^{31} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{32} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{33} b_{ij} \end{bmatrix} \iff C_{kl} = \sum_{i,j} a_{ij}^{kl} b_{ij}
 \end{aligned}$$

- What?

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{11}, \mathbf{A}^{12}, \mathbf{A}^{13} \\ \mathbf{A}^{21}, \mathbf{A}^{22}, \mathbf{A}^{23} \\ \mathbf{A}^{31}, \mathbf{A}^{32}, \mathbf{A}^{33} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \mathbb{A} : \mathbf{B}$$

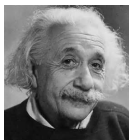
# 小结

Table : 张量的生成表格

	抽象形式	指标表示	指标算式	抽象算式
标量 (0 阶张量)	$a$	$a$	$y = ax$	$y = ax$
向量 (1 阶张量)	$\mathbf{a}$	$a_i$	$y = \sum_i a_i x_i$	$y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$
2 阶张量 (矩阵)	$\mathbf{A}$	$a_{ij}$	$y_j = \sum_i a_{ij} x_i$	$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\cdot) \mathbf{x}$
3 阶张量	$\mathbf{A}$	$a_{ij}^k$	$y_k = \sum_{i,j} a_{ij}^k b_{ij}$	$\mathbf{y} = \mathbf{A} : \mathbf{B}$
4 阶张量	$\mathbb{A}$	$a_{ij}^{kl}$	$C_{kl} = \sum_{i,j} a_{ij}^{kl} b_{ij}$	$\mathbf{C} = \mathbb{A} : \mathbf{B}$

## 小结

- 张量是标量、向量、矩阵的自然延伸，是表征高维复杂线性关系的基本工具。
- 这里的“线性”不仅指线性代数运算，后续还会推广到微分、积分等线性分析运算。
- 张量的指标是张量运算的重要工具，须特别注意。
- 前述张量的表达，数学的推导和表示等，并不严密，目的是建立基本概念，后续学习中将采用更为严格的方式定义和描述张量。



I admire the elegance of your method of computation; it must be nice to ride through these fields upon the **horse of true mathematics** while the like of us have to make **our way laboriously on foot**.

Albert Einstein

# 概述

- 张量是描述线性关系的一类**几何结构**，最早可以追溯到高斯在微分几何方面的开创性工作。
- 连续介质力学由于其所研究物理量的**几何特性**，在其理论构架中也广泛采用了张量表示。
- 张量具有**标架不变性**，基于张量定义的规律较容易满足客观性原理，同时张量表示能够大大简化表述，并且能否清楚的显示表达式的**物理实质**。
- 本课程仅从连续介质力学特别是损伤力学的需求出发，简要介绍张量的表示方法和性质，作为学习和研究的基础。

## 笛卡尔张量

- 鉴于本课程涉及的理论均建立在正交直线坐标系（笛卡尔坐标系）内，这里将讨论限定在这一类坐标系内，所涉及的张量即笛卡尔张量，并不再涉及协变量与逆变量的区分。
- 考虑三维空间中的矢量  $\boldsymbol{u}$ ，在基矢量  $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$  定义的笛卡尔坐标系内， $\boldsymbol{u}$  可表示为如下形式：

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \boldsymbol{e}_i$$

## 张量简明示意

坐标系  $(x, y, z)$  可以表示为  $(x_1, x_2, x_3)$  , 有 :

$$x \rightarrow x_1 \rightarrow 1 \quad y \rightarrow x_2 \rightarrow 2 \quad z \rightarrow x_3 \rightarrow 3$$

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T = [u_1, u_2, u_3]^T \rightarrow \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$\sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$



# 张量简明运算

张量的直接乘积 ( 代数运算 ):

$$u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} = w_{ij} \quad \sigma_{ij} \epsilon_{kl} = \phi_{ijkl}$$

张量对坐标的偏导 ( 分析运算 ):

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = u_{i,2} = w_{i2} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} = w_{ij}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \sigma_{ij,kl} = \phi_{ijkl}$$

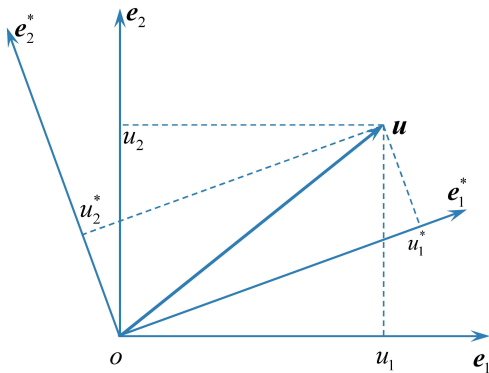
# 求和约定

**爱因斯坦求和约定**：在同一项内（单项式、乘积式、求导式等）重复一次且仅重复一次的指标，表示在指标的取值范围内求和。

$$\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}_i$$

$$\sigma_{ij,j} = \sum_j \sigma_{ij,j} = \sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3}$$

# 坐标变换



$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{u} = u_i^* \mathbf{e}_i^*$$

# 坐标变换

由于向量（张量）的坐标无关性

$$u_i \mathbf{e}_i = u_i^* \mathbf{e}_i^* \Rightarrow u_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* = u_i^* \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^*$$

对于正交坐标系，有

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

于是可得如下坐标变换公式

$$u_j^* = u_i \beta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^*$$

可以证明坐标转换矩阵具有正交性： $\beta_{ik} \beta_{jk} = \beta_{ki} \beta_{kj} = \delta_{ij}$ 。

# 坐标变换

将向量看作 1 阶张量

$$u_j^* = u_i \beta_{ij}$$

2 阶张量  $T$  的坐标分量满足

$$T_{ij}^* = \beta_{ik} \beta_{jl} T_{kl}$$

$n$  阶张量  $R$  满足下述坐标转换方程

$$R_{i_1 \dots i_n}^* = \beta_{i_1 j_1} \dots \beta_{i_n j_n} R_{j_1 \dots j_n}$$

而上述方程，在很多教科书中当作  $n$  阶张量的定义。

## 张量的运算和性质

- 前述讨论中不加说明地给出了张量的两类表示方法：**抽象表示方法与指标表示方法。**
- 抽象表示更加简洁，而指标表示能够更加清晰地跟踪张量的运算和坐标变换的过程。
- 本课程采用了以张量抽象表示方法为主的表达方式，同时在某些时候也借助于指标形式的优点简化相关的运算和表达式。
- 本小节中介绍的张量运算，则采用**以指标形式定义抽象算符的基本思路。**

# 张量的内积

对于两个张量  $\alpha$ 、 $\beta$  单点积，可以定义为

$$\alpha \cdot \beta = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n} \beta_{j_1 j_2 \dots j_{m-1} j_m} \delta_{i_n j_1} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} k} \beta_{k j_2 \dots j_{m-1} j_m}$$

对于高阶张量，经常用到双点积运算。一般存在两类双点积运算

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha : \beta \\ \alpha \dots \beta \end{array} \right. = \begin{array}{l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n} \beta_{j_1 j_2 \dots j_{m-1} j_m} \delta_{i_{n-1} j_1} \delta_{i_n j_2} \\ \alpha_{i_1 i_2 \dots k_1 k_2} \beta_{k_1 k_2 \dots j_{m-1} j_m} \\ \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n} \beta_{j_1 j_2 \dots j_{m-1} j_m} \delta_{i_n j_1} \delta_{i_{n-1} j_2} \\ \alpha_{i_1 i_2 \dots k_1 k_2} \beta_{k_2 k_1 \dots j_{m-1} j_m} \end{array}$$

同理，也可以定义高阶张量的各类高阶点积，张量的高阶点积也可以看作是向量内积的推广。

## 张量的并乘（张量积）

$n$  阶张量  $P_{(n)}$  与  $m$  阶张量  $Q_{(m)}$  并乘可得  $m+n$  阶张量  $R_{(n+m)}$ ，表示为

$$R_{(n+m)} = P_{(n)} \otimes Q_{(m)}$$

采用指标表示可写为

$$R_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} = P_{i_1 \dots i_n} Q_{j_1 \dots j_m}$$

例如：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$



# 指标表示与抽象表示的联系

- 对于矢量

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$$

- 二阶张量

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T_{ij}^* \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_j^*$$

$T_{ij}$  与  $T_{ij}^*$  之间满足二阶坐标转换关系，而  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  与  $\mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_j^*$  为对应坐标系下的二阶基张量。

- 推而广之，对于  $n$  阶张量，有

$$\mathbf{R} = R_{i_1 \dots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n}$$

## 二阶实对称张量

- 对于二阶张量  $S = S_{ij}e_i \otimes e_j$ ，若满足分量取实数值且  $S_{ij} = S_{ji}$ ，则称之为二阶实对称张量。
- 二阶张量的特征方程为

$$S \cdot n = \lambda n \quad \text{or} \quad S_{ij}n_j = \lambda n_i$$

整理得

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \quad \begin{cases} I_1 = S_{kk} \\ I_2 = \frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij} - S_{ii}S_{jj}) \\ I_3 = \det(S_{ij}) \end{cases}$$

- 可以证明：**实对称张量特征值为实数，特征向量相互正交。**

## 二阶实对称张量

- 将二阶张量分解为球张量  $P$  和偏张量  $D$  两部分

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{D} \\ S_{ij} = P_{ij} + D_{ij} \end{cases} \quad \begin{cases} P_{ij} = \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \\ D_{ij} = S_{ij} - P_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \end{cases}$$

- 偏张量满足  $D_{kk} = 0$  , 其特征方程为

$$\eta^3 - J_1 \eta^2 - J_2 \eta - J_3 = 0 \quad \begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} \\ J_3 = \det(D_{ij}) \end{cases}$$

- 上述讨论中给出的  $I_1$  ,  $I_2$  ,  $I_3$  ,  $J_2$  以及  $J_3$  统称为张量  $S$  的**不变量**。

# 哈密尔顿—凯莱定理

基于内积定义二阶张量的整数幂函数

$$S^m = \underbrace{S \cdots \cdots S}_{n \text{ 个}}$$

## 定理

张量的特征多项式也是其零化多项式

$$S^3 - I_1 S^2 - I_2 S - I_3 = 0$$

根据此定理，可以将张量  $S$  的高次幂  $S^m (m \geq 3)$  表示为其低次幂  $(S^2, S, I)$  和不变量  $(I_1, I_2, I_3)$ 。

# 张量对坐标的偏导运算

针对张量的分量（下标）表示和抽象表示，分别采取以下方式进行偏导运算：

- 张量对下标的偏导数

$$R_{i_1 i_2 \dots i_n, j} = \partial_{x_j} R_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\partial R_{i_1 i_2 \dots i_n}}{\partial x_j}$$

- 引入哈密尔顿算符

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{e}_j$$

# 张量对坐标的偏导运算

- 张量场的梯度

$$\begin{cases} \nabla \otimes \mathbf{R} = R_{i_1 i_2 \dots i_n, j} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \\ \mathbf{R} \otimes \nabla = R_{i_1 i_2 \dots i_n, j} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \otimes \mathbf{e}_j \end{cases}$$

- 位移向量场的梯度

$$\begin{cases} \nabla \otimes \mathbf{u} = u_{i,j} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \rightarrow u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \mathbf{u} \otimes \nabla = u_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = u_{j,i} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \rightarrow u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \end{cases}$$

$$\nabla^s \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla) \rightarrow \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

## 张量对坐标的偏导运算

- 张量场的散度

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{R} = R_{i_1 i_2 \dots i_n, j} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \\ \quad = R_{j i_2 \dots i_n, j} \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \\ \mathbf{R} \cdot \nabla = R_{i_1 i_2 \dots i_n, j} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \cdot \mathbf{e}_j \\ \quad = R_{i_1 i_2 \dots j, j} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{n-1}} \end{array} \right.$$

- 应力张量场的散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij,k} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \sigma_{ij,k} \delta_{ki} \otimes \mathbf{e}_j = \sigma_{ij,i} \mathbf{e}_j = \sigma_{ij,j} \mathbf{e}_i \rightarrow \sigma_{ij,j}$$

注意应力的对称性： $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ !

# 张量场的积分

## 定理 (高斯散度定理)

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

## 定理 (向量场形式的高斯散度定理)

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \Leftrightarrow \int_{\Omega} v_{i,i} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} v_i n_i dS$$

## 定理 (二阶对称 (应力) 张量场的高斯散度定理)

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \Leftrightarrow \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j dS$$



# 张量场的积分

- 考虑如下公式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \rightarrow \frac{\partial(\sigma_{ij}v_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}v_j + \sigma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \mathbf{v})$$

- 两边积分，并使用散度定理

$$\oint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \mathbf{v}) \, d\Omega$$

## 虚功原理！

## 张量场的积分

上述高斯散度定理及其推论可以直接推广到张量场，当然，很多细节也需要重新定义和考虑，具体的推导和表达式请参阅相关教材。上述张量场积分的性质和变换在之后将起到十分重要的作用，积分定理的应用将在应力应变分析章节中具体讲解。

# 张量函数与张量偏导数初步

- 张量的张量函数

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{A}) \quad B_{ij} = F_{ij}(A_{kl})$$

- 张量函数的导数

$$\mathbf{F}'(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{A} + h\mathbf{C}) - \mathbf{F}(\mathbf{A})}{h}$$

$$\mathbf{F}'(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mathbf{F}'(\mathbf{A}) \bullet \mathbf{C}$$

$$d\mathbf{A} = h\mathbf{C} \Rightarrow d\mathbf{B} = \mathbf{F}'(\mathbf{A}) \bullet d\mathbf{A} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{F}'(\mathbf{A})$$

# 张量的标量函数及其导数

- 二阶张量的迹

$$I_1 = \sigma_{ii} = \delta_{ij}\sigma_{ij}$$

$$I_1 + dI_1 = \delta_{ij}(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) \rightarrow \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij}$$

- 二阶张量的完全平方

$$y = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$$

$$y + dy = (\sigma_{ij} + d\sigma_{ij})(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) \rightarrow \frac{\partial y}{\partial \sigma_{ij}} = 2\sigma_{ij}$$

# 张量函数与张量偏导数初步

- 张量的复合函数

$$B = F[G(A)] \quad B_{ij} = F_{ij}[G_{mn}(A_{kl})]$$

- 复合函数导数的链规则

$$\frac{\partial B}{\partial A} = \frac{\partial F}{\partial G} \bullet \frac{\partial G}{\partial A}$$

# 张量的标量函数及其导数

- 张量的球偏分解

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{pq}} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \frac{1}{3}\delta_{kp}\delta_{kq}\delta_{ij}$$

- 第二不变量

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{pq}} = \frac{\partial J_2}{\partial s_{ij}} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{pq}} = s_{ij} \left( \delta_{ip}\delta_{jq} - \frac{1}{3}\delta_{kp}\delta_{kq}\delta_{ij} \right) = s_{pq}$$

# 张量函数与张量偏导数初步

- 张量的乘积及其导数

$$B = F(A) \otimes G(A) \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial A} = ?$$

其它更加深入的内容，如有兴趣，请参阅关于张量的专著，如：黄克智，薛明德，陆明万. 张量分析 (第二版). (2003) 北京：清华大学出版社.

谢谢！

