第二讲：张量分析基础

弹塑性力学研究生核心课程

任晓丹

同济大学建筑工程系
www.renxiaodan.com

October 8, 2017

本节主要内容

1. 张量概述
2. 张量的运算和性质
3. 张量分析初步

Why？

- 弹塑性力学的三要素：非线性、多维、基础。
- 张量是适用于多维函数、方程以及微分系统等的表示工具。
- 张量的本质是（多维、一般）线性变换。

What？

标量

- 标量

$$x, y, x_1, y_1, \ldots\ldots$$

- 标量函数

$$y = f(x), y_1 = g(x_1), \ldots\ldots$$

- 线性标量函数 (线性变换)

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

- 线性函数的表示

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \Longleftrightarrow y = ax$$

向量

- 向量

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$$

- 向量的标量函数

$$y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$$

- 线性函数

$$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2)$$

$$\Longleftrightarrow y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \sum_i a_i x_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$$

向量

- 向量的向量函数

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

- 线性函数

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \Longleftrightarrow y_i = \sum_j a_{ij}x_j \ , \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

矩阵

- 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11}, b_{12}, b_{13} \\ b_{21}, b_{22}, b_{23} \\ b_{31}, b_{32}, b_{33} \end{bmatrix}$$

- 矩阵的标量函数

$$y = f(\boldsymbol{B})$$

- 线性函数

$$f(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = f(\boldsymbol{A}) + f(\boldsymbol{B})$$

$$\Longleftrightarrow y = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$$

矩阵

- 矩阵的向量函数

$$\begin{cases} y_1 = f_1(\boldsymbol{B}) \\ y_2 = f_2(\boldsymbol{B}) \\ y_3 = f_3(\boldsymbol{B}) \end{cases}$$

- 线性函数

$$\begin{cases} y_1 = \sum_{i,j} a_{ij}^{1} b_{ij} \\ y_2 = \sum_{i,j} a_{ij}^{2} b_{ij} \\ y_3 = \sum_{i,j} a_{ij}^{3} b_{ij} \end{cases} \Longleftrightarrow y_k = \sum_{i,j} a_{ij}^{k} b_{ij}$$

- What?

$$\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3\right]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = \mathbf{A} : \boldsymbol{B}$$

矩阵

- 矩阵的矩阵（线性）函数

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_{11}, C_{12}, C_{13} \\ C_{21}, C_{22}, C_{23} \\ C_{31}, C_{32}, C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(\boldsymbol{B}), f_{12}(\boldsymbol{B}), f_{13}(\boldsymbol{B}) \\ f_{21}(\boldsymbol{B}), f_{22}(\boldsymbol{B}), f_{23}(\boldsymbol{B}) \\ f_{31}(\boldsymbol{B}), f_{32}(\boldsymbol{B}), f_{33}(\boldsymbol{B}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i,j} a_{ij}^{11} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{12} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{13} b_{ij} \\ \sum_{i,j} a_{ij}^{21} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{22} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{23} b_{ij} \\ \sum_{i,j} a_{ij}^{31} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{32} b_{ij}, \sum_{i,j} a_{ij}^{33} b_{ij} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow C_{kl} = \sum_{i,j} a_{ij}^{kl} b_{ij}$$

- What?

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{11}, \boldsymbol{A}^{12}, \boldsymbol{A}^{13} \\ \boldsymbol{A}^{21}, \boldsymbol{A}^{22}, \boldsymbol{A}^{12} \\ \boldsymbol{A}^{31}, \boldsymbol{A}^{32}, \boldsymbol{A}^{33} \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \mathbb{A} : \boldsymbol{B}$$

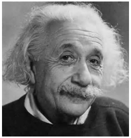
小结

Table：张量的生成表格

	抽象形式	指标表示	指标算式	抽象算式
标量（0 阶张量）	a	a	$y = ax$	$y = ax$
向量（1 阶张量）	$\boldsymbol{a}$	a_i	$y = \sum_i a_i x_i$	$y = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$
2 阶张量（矩阵）	$\boldsymbol{A}$	a_{ij}	$y_j = \sum_i a_{ij} x_i$	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\cdot)\boldsymbol{x}$
3 阶张量	$\mathbf{A}$	a_{ij}^k	$y_k = \sum_{i,j} a_{ij}^k b_{ij}$	$\boldsymbol{y} = \mathbf{A} : \boldsymbol{B}$
4 阶张量	$\mathbb{A}$	a_{ij}^{kl}	$C_{kl} = \sum_{i,j} a_{ij}^{kl} b_{ij}$	$\boldsymbol{C} = \mathbb{A} : \boldsymbol{B}$

小结

- 张量是标量、向量、矩阵的自然延伸，是表征高维复杂线性关系的基本工具。
- 这里的“线性”不仅指线性代数运算，后续还会推广到微分、积分等线性分析运算。
- 张量的指标是张量运算的重要工具，须特别注意。
- 前述张量的表达，数学的推导和表示等，并不严密，目的是建立基本概念，后续学习中将采用更为严格的方式定义和描述张量。

I admire the elegance of your method of computation; it must be nice to ride through these fields upon the horse of true mathematics while the like of us have to make our way laboriously on foot.

Albert Einstein

概述

- 张量是描述线性关系的一类几何结构，最早可以追溯到高斯在微分几何方面的开创性工作。
- 连续介质力学由于其所研究物理量的几何特性，在其理论构架中也广泛采用了张量表示。
- 张量具有标架不变性，基于张量定义的规律较容易满足客观性原理，同时张量表示能够大大简化表述，并且能否清楚的显示表达式的物理实质。
- 本课程仅从连续介质力学特别是损伤力学的需求出发，简要介绍张量的表示方法和性质，作为学习和研究的基础。

笛卡尔张量

- 鉴于本课程涉及的理论均建立在正交直线坐标系（笛卡儿坐标系）内，这里将讨论限定在这一类坐标系内，所涉及的张量即笛卡儿张量，并不再涉及协变量与逆变量的区分。
- 考虑三维空间中的矢量 $\boldsymbol{u}$，在基矢量 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 定义的笛卡儿坐标系内，$\boldsymbol{u}$ 可表示为如下形式:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \boldsymbol{e}_i$$

张量简明示意

坐标系 (x, y, z) 可以表示为 (x_1, x_2, x_3)，有：

$$x \to x_1 \to 1 \quad y \to x_2 \to 2 \quad z \to x_3 \to 3$$

$$\boldsymbol{u} = [u_x, u_y, u_z]^T = [u_1, u_2, u_3]^T \to u_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

张量简明运算

张量的直接乘积（代数运算）:

$$u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} = w_{ij} \qquad \sigma_{ij}\epsilon_{kl} = \phi_{ijkl}$$

张量对坐标的偏导（分析运算）:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = u_{i,2} = w_{i2} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} = w_{ij}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \sigma_{ij,kl} = \phi_{ijkl}$$

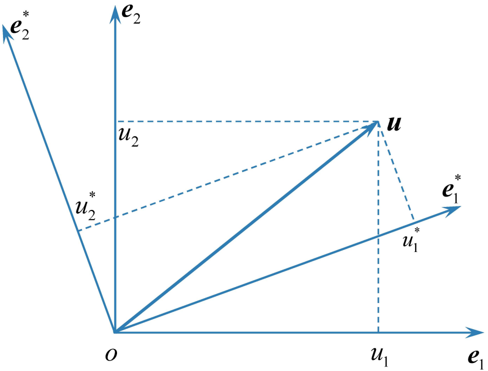
求和约定

爱因斯坦求和约定：在同一项内（单项式、乘积式、求导式等）重复一次且仅重复一次的指标，表示在指标的取值范围内求和。

$$\boldsymbol{u} = \sum_i u_i \boldsymbol{e}_i = u_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\sigma_{ij,j} = \sum_j \sigma_{ij,j} = \sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3}$$

坐标变换



$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{u} = u_i^* \boldsymbol{e}_i^*$$

坐标变换

由于向量（张量）的坐标无关性

$$u_i \boldsymbol{e}_i = u_i^* \boldsymbol{e}_i^* \;\Rightarrow\; u_i \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j^* = u_i^* \boldsymbol{e}_i^* \cdot \boldsymbol{e}_j^*$$

对于正交坐标系，有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i^* \cdot \boldsymbol{e}_j^* = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

于是可得如下坐标变换公式

$$u_j^* = u_i \beta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j^*$$

可以证明坐标转换矩阵具有正交性：$\beta_{ik}\beta_{jk} = \beta_{ki}\beta_{kj} = \delta_{ij}$。

坐标变换

将向量看作 1 阶张量

$$u_j^* = u_i \beta_{ij}$$

2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的坐标分量满足

$$T_{ij}^* = \beta_{ik}\beta_{jl}T_{kl}$$

n 阶张量 $\boldsymbol{R}$ 满足下述坐标转换方程

$$R^*_{i_1\cdots\cdots i_n} = \beta_{i_1 j_1}\cdots\cdots\beta_{i_n j_n}R_{j_1\cdots\cdots j_n}$$

而上述方程，在很多教科书中当作 n 阶张量的定义。

张量的运算和性质

- 前述讨论中不加说明地给出了张量的两类表示方法：抽象表示方法与指标表示方法。
- 抽象表示更加简洁，而指标表示能够更加清晰地跟踪张量的运算和坐标变换的过程。
- 本课程采用了以张量抽象表示方法为主的表达方式，同时在某些时候也借助于指标形式的优点简化相关的运算和表达式。
- 本小节中介绍的张量运算，则采用以指标形式定义抽象算符的基本思路。

张量的内积

对于两个张量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 单点积，可以定义为

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots i_{n-1} i_n}\beta_{j_1 j_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}\delta_{i_n j_1} = \alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots i_{n-1} k}\beta_{k\, j_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}$$

对于高阶张量，经常用到双点积运算。一般存在两类双点积运算

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{\beta} & = \alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots i_{n-1} i_n}\beta_{j_1 j_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}\delta_{i_{n-1} j_1}\delta_{i_n j_2} \\ & = \alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots k_1 k_2}\beta_{k_1 k_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m} \\ \boldsymbol{\alpha}..\boldsymbol{\beta} & = \alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots i_{n-1} i_n}\beta_{j_1 j_2\cdots\cdots j_{m-1} j_m}\delta_{i_n j_1}\delta_{i_{n-1} j_2} \\ & = \alpha_{i_1 i_2\cdots\cdots k_1 k_2}\beta_{k_2 k_1\cdots\cdots j_{m-1} j_m} \end{cases}$$

同理，也可以定义高阶张量的各类高阶点积，张量的高阶点积也可以看作是向量内积的推广。

张量的并乘（张量积）

n 阶张量 $\boldsymbol{P}_{(n)}$ 与 m 阶张量 $\boldsymbol{Q}_{(m)}$ 并乘可得 $m+n$ 阶张量 $\boldsymbol{R}_{(n+m)}$，表示为

$$\boldsymbol{R}_{(n+m)} = \boldsymbol{P}_{(n)} \otimes \boldsymbol{Q}_{(m)}$$

采用指标表示可写为

$$R_{i_1\cdots\cdots i_n j_1\cdots\cdots j_m} = P_{i_1\cdots\cdots i_n} Q_{j_1\cdots\cdots j_m}$$

例如：

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

指标表示与抽象表示的联系

- 对于矢量

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i$$

- 二阶张量

$$\boldsymbol{T} = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = T^*_{ij} \boldsymbol{e}^*_i \otimes \boldsymbol{e}^*_j$$

  T_{ij} 与 T^*_{ij} 之间满足二阶坐标转换关系，而 $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ 与 $\boldsymbol{e}^*_i \otimes \boldsymbol{e}^*_j$ 为对应坐标系下的二阶基张量。
- 推而广之，对于 n 阶张量，有

$$\boldsymbol{R} = R_{i_1 \ldots\ldots i_n} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n}$$

二阶实对称张量

- 对于二阶张量 $\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$，若满足分量取实数值且 $S_{ij} = S_{ji}$，则称之为二阶实对称张量。
- 二阶张量的特征方程为

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n} \quad \text{or} \quad S_{ij} n_j = \lambda n_i$$

整理得

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \qquad \begin{cases} I_1 = S_{kk} \\ I_2 = \frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij} - S_{ii}S_{jj}) \\ I_3 = \det(S_{ij}) \end{cases}$$

- 可以证明：实对称张量特征值为实数，特征向量相互正交。

二阶实对称张量

- 将二阶张量分解为球张量 $\boldsymbol{P}$ 和偏张量 $\boldsymbol{D}$ 两部分

$$\begin{cases} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D} \\ S_{ij} = P_{ij} + D_{ij} \end{cases} \qquad \begin{cases} P_{ij} = \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \\ D_{ij} = S_{ij} - P_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \end{cases}$$

- 偏张量满足 $D_{kk} = 0$，其特征方程为

$$\eta^3 - J_1 \eta^2 - J_2 \eta - J_3 = 0 \quad \begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} \\ J_3 = \det(D_{ij}) \end{cases}$$

- 上述讨论中给出的 I_1，I_2，I_3，J_2 以及 J_3 统称为张量 $\boldsymbol{S}$ 的不变量。

哈密尔顿—凯莱定理

基于内积定义二阶张量的整数幂函数

$$\boldsymbol{S}^n = \underbrace{\boldsymbol{S}\cdots\cdots\cdots\boldsymbol{S}}_{n\text{个}}$$

定理

张量的特征多项式也是其零化多项式

$$\boldsymbol{S}^3 - I_1\boldsymbol{S}^2 - I_2\boldsymbol{S} - I_3 = 0$$

根据此定理，可以将张量 $\boldsymbol{S}$ 的高次幂 $\boldsymbol{S}^n (n \geq 3)$ 表示为其低次幂 $(\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{I})$ 和不变量 (I_1, I_2, I_3)。

张量对坐标的偏导运算

针对张量的分量（下标）表示和抽象表示，分别采取以下方式进行偏导运算：

- 张量对下标的偏导数

$$R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} = \partial_{x_j} R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n} = \frac{\partial R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n}}{\partial x_j}$$

- 引入哈密尔顿算符

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_j$$

张量对坐标的偏导运算

- 张量场的梯度

$$\begin{cases} \nabla \otimes \boldsymbol{R} = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \\ \boldsymbol{R} \otimes \nabla = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \otimes \boldsymbol{e}_j \end{cases}$$

- 位移向量场的梯度

$$\begin{cases} \nabla \otimes \boldsymbol{u} = u_{i,j} \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i \to u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \boldsymbol{u} \otimes \nabla = u_{i,j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = u_{j,i} \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i \to u_{j,i} = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \end{cases}$$

$$\nabla^{\mathrm{s}} \otimes \boldsymbol{u} = \frac{1}{2} \left(\nabla \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \otimes \nabla \right) \to \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right)$$

张量对坐标的偏导运算

- 张量场的散度

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{R} & = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \\ & = R_{j i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \\ \boldsymbol{R} \cdot \nabla & = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_n, j} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_n} \cdot \boldsymbol{e}_j \\ & = R_{i_1 i_2 \cdots\cdots j, j} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots\cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_{n-1}} \end{cases}$$

- 应力张量场的散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij,k} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \sigma_{ij,k} \delta_{ki} \otimes \boldsymbol{e}_j = \sigma_{ij,i} \boldsymbol{e}_j = \sigma_{ij,j} \boldsymbol{e}_i \rightarrow \sigma_{ij,j}$$

注意应力的对称性：$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$!

张量场的积分

定理 (高斯散度定理)

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\ d\Omega = \oiint_{\partial\Omega} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\ dS$$

定理 (向量场形式的高斯散度定理)

$$\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{v}\ d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\ dS \ \Leftrightarrow\ \int_\Omega v_{i,i}\ d\Omega = \oint_{\partial\Omega} v_i n_i\ dS$$

定理 (二阶对称（应力）张量场的高斯散度定理)

$$\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\ d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\ dS \ \Leftrightarrow\ \int_\Omega \sigma_{ij,j} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j dS$$

张量场的积分

- 考虑如下公式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v})\rightarrow\frac{\partial(\sigma_{ij}v_j)}{\partial x_i}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}v_j+\sigma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\rightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\sigma}:(\nabla\otimes\boldsymbol{v})$$

- 两边积分，并使用散度定理

$$\oint_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}:(\nabla\otimes\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\Omega$$

虚功原理！

张量场的积分

上述高斯散度定理及其推论可以直接推广到张量场，当然，很多细节也需要重新定义和考虑，具体的推导和表达式请参阅相关教材。上述张量场积分的性质和变换在之后将起到十分重要的作用，积分定理的应用将在应力应变分析章节中具体讲解。

张量函数与张量偏导数初步

- 张量的张量函数

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}) \qquad B_{ij} = F_{ij}(A_{kl})$$

- 张量函数的导数

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A} + h\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})}{h}$$

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{C}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = h\boldsymbol{C} \Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{A}) \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A} \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{A})$$

张量的标量函数及其导数

- 二阶张量的迹

$$I_1 = \sigma_{ii} = \delta_{ij}\sigma_{ij}$$

$$I_1 + \mathrm{d}I_1 = \delta_{ij}(\sigma_{ij} + \mathrm{d}\sigma_{ij}) \rightarrow \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij}$$

- 二阶张量的完全平方

$$y = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$$

$$y + \mathrm{d}y = (\sigma_{ij} + \mathrm{d}\sigma_{ij})(\sigma_{ij} + \mathrm{d}\sigma_{ij}) \rightarrow \frac{\partial y}{\partial \sigma_{ij}} = 2\sigma_{ij}$$

张量函数与张量偏导数初步

- 张量的复合函数

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})] \qquad B_{ij} = F_{ij}[G_{mn}(A_{kl})]$$

- 复合函数导数的链规则

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{A}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{G}} \bullet \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{A}}$$

张量的标量函数及其导数

- 张量的球偏分解

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{pq}} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \frac{1}{3}\delta_{kp}\delta_{kq}\delta_{ij}$$

- 第二不变量

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{pq}} = \frac{\partial J_2}{\partial s_{ij}}\frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{pq}} = s_{ij}\left(\delta_{ip}\delta_{jq} - \frac{1}{3}\delta_{kp}\delta_{kq}\delta_{ij}\right) = s_{pq}$$

张量函数与张量偏导数初步

- 张量的乘积及其导数

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})\Rightarrow\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{A}}=?$$

其它更加深入的内容，如有兴趣，请参阅关于张量的专著，如: 黄克智，薛明德，陆明万. 张量分析 (第二版). (2003) 北京：清华大学出版社.

谢谢！

可登陆以下个人主页查阅、下载相关资料。
http://www.renxiaodan.com/